Technische Universität München

Distributionen

Prof. Dr. H.W. Alt

Version: 20160828 **Letzte größere Änderung: 29Dez2014**

Das Skript wird parallel zu der Vorlesung "Mathematische Kontinuumsmechanik" [4] erstellt. Diese aktuelle Version ist für Studenten der Vorlesung gedacht. Der Stoff ist aber von allgemeinem Interesse. Das Skript ist in Teilen in Englisch verfasst, d.h. die Sprache des Quellcodes ist unverändert geblieben. Skript ist noch in Bearbeitung.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

This paper deals with the definition of distributions. This is a notion, which is used in the theory of partial differential equations. It includes a wide range from fundamental solutions to the study of the dynamics in particle physics to Fourier analysis. To handle distributions, it is not necessary to know the full topological definition (the toppology will be introduced in section 12). It is enough being able to manipulate distributions, by this I mean knowing the basic rules (see 2.4), that is, the rule of taking a derivative of a distribution, and the rule of multiplying a distribution by a function.

Um konkret zu sein, es ist zum Beispiel das Ziel, die Differentialgleichung

$$\mathrm{div} q = g \tag{1.1}$$

in einer offenen Menge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ zu definieren für Größen, die nur $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U})$-Funktionen sind. Um dies zu tun, multiplizieren wir die Differentialgleichung mit einer ***Testfunktion*** $\zeta \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathcal{U})$ und erhalten[1]

$$0 = \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot (-\,\mathrm{div} q + g)\,\mathrm{dL}^n = \int_{\mathcal{U}} (\nabla\zeta \bullet q + \zeta \cdot g)\,\mathrm{dL}^n$$

nach partieller Integration, wobei im letzten Integral nur noch gebraucht wird, dass die Funktionen q_i und g in $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U})$ sind. Wir haben also die folgenden zwei Bestandteile

$$\zeta \mapsto \int_{\mathcal{U}} \nabla\zeta \bullet q\,\mathrm{dL}^n\,, \qquad \zeta \mapsto \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot g\,\mathrm{dL}^n\,,$$

die linear in ζ sind. Indem wir lineare Abbildungen

$$Q_i, G : \mathcal{C}^\infty_0(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}\,,$$

d.h. ***Distributionen*** (siehe 2.2, wir schreiben $Q_i(\zeta) = \langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{Q_i} \,\rangle$ und $G(\zeta) = \langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{G} \,\rangle$), definieren durch

$$\langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{Q_i} \,\rangle := \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot q_i\,\mathrm{dL}^n\,, \qquad \langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{G} \,\rangle := \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot g\,\mathrm{dL}^n\,,$$

wird die Differentialgleichung zu

$$0 = \sum_i \langle\, \boldsymbol{\partial_i \zeta}\,, \boldsymbol{Q_i} \,\rangle + \langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{G} \,\rangle\,.$$

Indem wir nun lineare Abbildungen $\partial_i Q_i : \mathcal{C}^\infty_0(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$\langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{\partial_i Q_i} \,\rangle := \langle\, \boldsymbol{-\partial_i \zeta}\,, \boldsymbol{Q_i} \,\rangle$$

(es ist $\partial_i Q_i(\zeta) = Q_i(-\partial_i \zeta)$), wird aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \langle\, \boldsymbol{\partial_i \zeta}\,, \boldsymbol{Q_i} \,\rangle + \langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{G} \,\rangle = -\sum_i \langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{\partial_i Q_i} \,\rangle + \langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{G} \,\rangle \\ &= \Big\langle\, \boldsymbol{\zeta}\,, -\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{\partial_i Q_i} + \boldsymbol{G} \,\Big\rangle\,, \end{aligned}$$

[1] wir bezeichnen das n-dimensionale Lebesgue-Maß mit L^n

das heißt im Raum der Distributionen gilt

$$\sum_i \partial_i Q_i = G \quad \text{oder} \quad \mathrm{div} Q = G\,.$$

Dieses Beispiel zeigt uns, wie der Begriff der Distribution benutzt werden kann.

The notion of distributions has a long history, see the doctoral theses of Peters [11], and there has also been an effort from aplications to introduce distributions, see Bedeaux [5]. In fact, the notion of distribution for the first time was introduced by physisists, and later this notion was dressed with a mathematical coat. Mathematically there are two different and equivalent methods to introduce distributions. One is to define a topology in the space $\mathscr{D}(\mathcal{U}) := \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$ and then to define the set of distributions as the dual space $\mathscr{D}(\mathcal{U})^*$ (see section 12). The second method is to define the set of distributions $\mathscr{D}'(\mathcal{U})$ as the set of linear mappings on $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$ satisfying (see 2.2) an estimate

$$|\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{T} \rangle| \le C_U \|\zeta\|_{C^{k_U}(\overline{U})}$$

for all $\zeta \in C_0^\infty(U)$, $U \subset\subset \mathcal{U}$.

We follow this last method and we do not use in sections 2 – 11 the topological results of section 12. However, the two methods are equivalent (see 12.5).

2 Distributionen

Here we define the main subject of this work, which are distributions on an open set $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. We are interested in the set of linear mappings

$$\big\{\, T\colon C_0^\infty(\mathcal{U};Y_1) \to Y_0 \ ; \ T \text{ is linear} \,\big\}\,, \tag{2.1}$$

where Y_0 and Y_1 are two Banach spaces over $\mathbb{K}$, where $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.1 Remark (Vector valued cases). We let here $Y_0 = \mathbb{K}$ and $Y_1 = Y$, where Y is a Banach space. That is, we focus on $\mathbb{K}$-valued linear mappings. The other case $Y_0 = Y$ and $Y_1 = \mathbb{K}$ you find, for example, in [9], see also section 5. The scalar case $Y_0 = \mathbb{K}$ and $Y_1 = \mathbb{K}$ is the usual one in literature.

You can take, for the first reading, the case that these Banach spaces are equal to $\mathbb{K}$, that is $Y_0 = \mathbb{K}$ and $Y_1 = Y = \mathbb{K}$, where you might consider the case $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Or you take the more advanced case $Y_0 = \mathbb{K}$ and $Y_1 = Y = \mathbb{K}^N$, where again you might consider the case $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. In general we define distributions for $Y_0 = \mathbb{K}$ and $Y_1 = Y$ (where Y a Banach space, e.g. $Y = \mathbb{K}$ or $Y = \mathbb{K}^N$).

2.2 Definition of distributions. Let Y be a Banach spaces over $\mathbb{K}$ and denote the set $C_0^\infty(\mathcal{U};Y)$ of ***test functions*** by

$$\mathscr{D}(\mathcal{U};Y) := C_0^\infty(\mathcal{U};Y)\,.$$

Then the set of ***Distributions*** on $\mathcal{U}$ is

$$\mathscr{D}'(\mathcal{U};Y) := \big\{\, T\colon \mathscr{D}(\mathcal{U};Y) \to \mathbb{K} \ ; \ T \text{ is linear and satisfies (2.3)} \,\big\}\,.$$

Here the estimate is

$$\begin{aligned} &\forall\, U \subset\subset \mathcal{U}:\ \exists\, C_U \geq 0,\ k_U \in \mathbb{N}_0 : \\ &\forall\, \zeta \in C_0^\infty(U;Y):\ |\langle \boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{T}\rangle| \leq C_U \|\zeta\|_{C^{k_U}(\overline{U};Y)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

This is the definition of distributions. To try a definition in words: $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$ is a distribution if and only if T is a linear $\mathbb{K}$-valued map on the space of test functions $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y)$ such that for every set $U \subset\subset \mathcal{U}$ es eine Konstante $C_U \geq 0$ und eine Ordnung $k_U \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$|\langle \boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{T}\rangle| \leq C_U \|\zeta\|_{C^{k_U}(\overline{U};Y)} \text{ für alle } \zeta \in C_0^\infty(U;Y)\,. \tag{2.3}$$

This is the same definition of a distribution. One writes $\mathscr{D}(\mathcal{U}) := \mathscr{D}(\mathcal{U};\mathbb{K})$ and $\mathscr{D}'(\mathcal{U}) := \mathscr{D}'(\mathcal{U};\mathbb{K})$. (We mention that in formulas we use $\mathscr{D}(\mathcal{U})$ instead of $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y)$ in order to make things shorter.)
Bezeichnungen: It is $\langle \boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{T}\rangle := \langle \boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{T}\rangle_{\boldsymbol{\mathscr{D}(\mathcal{U})}} := T(\zeta)$. And $U \subset\subset \mathcal{U}$ says that $\overline{U}$ is a compact set contained in $\mathcal{U}$. The prime in $\mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$ has, for the moment, no meaning, see section 12 for an interpretation.
Warnung: The estimate in the definition holds only for a particular set of test functions ζ, namely that its support is contained in $U \subset\subset \mathcal{U}$, as it is said. But U is arbitrary so that altogether all smooth functions ζ with compact support occur in the definition.

Later in section 12 we will give an equivalent definition with the help of a topoloy, therefore this is the topological definition. But here we rely on the definition using (2.3) (or equivalently (2.3)). We have the following

2.3 Eigenschaft. Let $(\zeta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y)$ satisfying the following:

(1) There is an $U \subset\subset \mathcal{U}$ with $\operatorname{supp}\zeta_m \subset U$ for all $m \in \mathbb{N}$.

(2) For every $k \in \mathbb{N}$ with this U it holds $\|\zeta_m\|_{C^k(\overline{U};Y)} \to 0$ as $m \to \infty$.

Then for any distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$

$$\langle \boldsymbol{\zeta_m}\,, \boldsymbol{T}\rangle \to 0 \text{ as } m \to \infty.$$

Notice: With the topology in section 12 the assumption on the sequence, that is (1) and (2), reads (see 12.4)

$$\zeta_m \to 0 \text{ in } \mathscr{D}(\mathcal{U};Y) \text{ as } m \to \infty\,. \tag{2.4}$$

Then the statement $\langle \boldsymbol{\zeta_m}\,, \boldsymbol{T}\rangle \to 0$ as $m \to \infty$, if it is true for every such sequence $(\zeta_m)_{m\in\mathbb{N}}$, means that T is sequentially continuous. But here we did not introduce a topology yet, for a topology see section 12. Consequently, here no convergence in the space $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y)$ is defined. We mention that in the literature it is often said that (2.4) holds, if the properties (1) and (2) are satisfied.

Beweis. This follows immediately from the inequality (2.3). ☐

The main property of distributions is that derivatives of an arbitrary order again defines a distribution. Therefore if T is a distribution then also $\partial^\alpha T$ (see (2.5)) is a distrubution.

2.4 Definition. Let $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$, that is, T is a distribution over $\mathcal{U}$.

(1) ***Ableitung einer Distribution.*** Für $j = 1,\dots,N$ ist $\partial_j T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$ definiert durch

$$\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{\partial_j T}\rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \langle -\boldsymbol{\partial_j \zeta}\,, \boldsymbol{T}\rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})}\,.$$

Merke: Entsprechend sind höhere Ableitungen definiert, siehe (2.5).

(2) ***Multiplikation mit einer Funktion.*** Für $a \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U};\mathbb{K})$ ist $aT \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$ definiert durch

$$\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{aT}\rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \langle \boldsymbol{a\zeta}\,, \boldsymbol{T}\rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})}\,.$$

Beweis (1). Es ist mit (2.3)

$$\left|\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{\partial_j T}\rangle\right| = \left|\langle \boldsymbol{\partial_j\zeta}\,, \boldsymbol{T}\rangle\right| \le C_U\|\partial_j\zeta\|_{C^{k_U}(\overline{U})} \le C_U\|\zeta\|_{C^{k_U+1}(\overline{U})}\,.$$

Hence $\partial_j T$ is a distribution. ☐

Beweis (2). Es ist mit (2.3)

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{aT}\rangle| &= |\langle \boldsymbol{a\zeta}\,, \boldsymbol{T}\rangle| \le C_U\|a\zeta\|_{C^{k_U}(\overline{U})} \\ &\le C_U C_{n,k_U}\|a\|_{C^{k_U}(\overline{U})}\cdot\|\zeta\|_{C^{k_U}(\overline{U})}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: It is used that $\|uv\|_{C^k(\overline{U})} \le C_{n,k}\|u\|_{C^k(\overline{U})}\|v\|_{C^k(\overline{U})}$. ☐

The derivatives are commutative, that is, $\partial_i\partial_j T = \partial_j\partial_i T$. This follows from the fact that $\partial_i\partial_j\zeta = \partial_j\partial_i\zeta$ for test functions, which are C^∞ (so at least C^2). Therefore this implies that for ***multiindices*** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ with $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ we are able to define

$$\partial^\alpha T := \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} T \text{ if } \alpha = \textstyle\sum_{l=1}^{k} \mathbf{e}_{i_l} \,. \tag{2.5}$$

The essential examples of distributions are given by measures and functions.

2.5 Measures and functions as distributions.

(1) Let μ be a measure on $\mathcal{U}$ such that measurable sets w.r.t. μ are induced by Borel sets. Then C_0^0-functions are integrable and $[\mu] \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ is defined for test functions ζ by

$$\langle \zeta \,, [\mu] \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \int_{\mathcal{U}} \zeta \, \mathrm{d}\mu \,.$$

(2) Let $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U})$. Then $[g] \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ is defined for test functions ζ by

$$\langle \zeta \,, [g] \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot g \, \mathrm{d}\mathrm{L}^n \,.$$

Remark: It is $[g] = [g\mathrm{L}^n]$. *Information:* Die extra Bezeichnung $[\mu]$ und $[f]$ für Distributionen, die durch ein Maß bzw. eine Funktion erzeugt wird, wird in der Literatur in der Regel nicht gemacht. Sie findet sich in Jäger [9] mit der Bezeichnung $<\mu>$. Wir führen sie konsequent durch, um Verwechslungen vorzubeugen.

Beweis (1). For $\operatorname{supp} \zeta \subset U$

$$\left| \langle \zeta \,, [\mu] \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} \right| = \left| \int_{\mathcal{U}} \zeta \, \mathrm{d}\mu \right| \le \mu(\overline{U}) \| \zeta \|_{C^0(\overline{U})} \,.$$

□

A family of particular measures are considered in section 6. The simplest version of a measure one can think of is "Dirac's measure", sometimes called "Dirac function" although it does not exist as a function.

2.6 Dirac distribution and Heaviside step function.

(1) If $x_0 \in \mathbb{R}^n$, then $\boldsymbol{\delta}_{x_0} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ defined by

$$\langle \zeta \,, \boldsymbol{\delta}_{x_0} \rangle := \zeta(x_0)$$

is called ***Dirac distribution*** at x_0.

(2) We let $n = 1$ and set

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x < 0 \,, \\ \text{any fixed value for } x = 0 \,, \\ 1 \text{ for } x > 0 \,. \end{cases}$$

The function h is called ***Heaviside function***. It follows

$$[h]' = \boldsymbol{\delta}_0 \text{ in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \,.$$

Remark: Here the prime in $[h]'$ denotes the first derivative.

(3) We take the Heaviside function in n-dimensional space

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x \bullet \mathbf{e}_1 < 0\,, \\ \text{any value for } x \bullet \mathbf{e}_1 = 0\,, \\ 1 \text{ for } x \bullet \mathbf{e}_1 > 0\,. \end{cases}$$

Then, if $\Gamma = \{x\,;\ x \bullet \mathbf{e}_1 = 0\}$, in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\partial_1[h] = [\mathrm{H}^{n-1} \llcorner \Gamma]\,, \quad \partial_i[h] = 0 \text{ for } i = 2, \ldots, n.$$

Definition: If $\Gamma \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ is a smooth m-dimensional surface, then the m-dimensional surface measure is denoted by $\mathrm{H}^m \llcorner \Gamma$. More general, if $\Gamma \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ is a Borel set, e.g. a locally closed set, then $\mathrm{H}^m \llcorner \Gamma(E) := \mathrm{H}^m(\Gamma \cap E)$, where H^m is the m-dimensional Hausdorff measure. See 6.1.

Beweis (2). It is

$$\begin{aligned} \langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, [\boldsymbol{h}]' \,\rangle &= \langle\, -\boldsymbol{\zeta}' \,, [\boldsymbol{h}] \,\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \zeta'(x) h(x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty \zeta'(x) \,\mathrm{d}x = \zeta(0) = \langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{\delta_0} \,\rangle\,, \end{aligned}$$

that is, $[h]' = \boldsymbol{\delta}_0$. □

Beweis (3). It is

$$\begin{aligned} \langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{\partial_1}[\boldsymbol{h}] \,\rangle &= \langle\, -\boldsymbol{\partial_1}\boldsymbol{\zeta} \,, [\boldsymbol{h}] \,\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_1\zeta(x) h(x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\{x\,;\ x \bullet \mathbf{e}_1 > 0\}} \partial_1 \zeta(x) \,\mathrm{dL}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \zeta(y, 0) \,\mathrm{dL}^{n-1}(y) \\ &= \int_\Gamma \zeta(x) \,\mathrm{dH}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x) \,\mathrm{d}(\mathrm{H}^{n-1} \llcorner \Gamma)(x) = \langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, [\mathbf{H}^{\boldsymbol{n-1}} \llcorner \boldsymbol{\Gamma}] \,\rangle\,, \end{aligned}$$

that is, $\partial_1[h] = [\mathrm{H}^{n-1} \llcorner \Gamma]$, and for $i \geq 2$

$$\begin{aligned} \langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{\partial_i}[\boldsymbol{h}] \,\rangle &= \langle\, -\boldsymbol{\partial_i}\boldsymbol{\zeta} \,, [\boldsymbol{h}] \,\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\zeta(x) h(x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\{x\,;\ x \bullet \mathbf{e}_1 > 0\}} \partial_i \zeta(x) \,\mathrm{dL}^n(x) = 0\,, \end{aligned}$$

that is, $\partial_i[h] = 0$, □

The Heaviside function is a fundamental solution of an ODE (see 7.9(1)). Another basic function is the fundamental solution of the Laplace equation (see 8.3). Fundamental solutions are defined in section 7 as distributions which is one of the main applications.

3 Faltung

Die Faltung wird gewöhnlicherweise zwischen $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen betrachtet, wobei eine dieser Funktionen kompakten Träger hat. Dann lautet die Definition

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{3.1}$$

Die Voraussetzung über den Träger kann man dabei ersetzen durch die Eigenschaft, dass $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ sind, und dann ist $f * g(x)$ für fast alle x definiert uns es ist $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Abschätzung

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.2}$$

In diesem Abschnitt betrachten wir die Faltung einer Distribution mit einer glatten Funktion mit kompaktem Träger. Auf diesem Wege approximieren wir beliebige Distributionen durch glatte Funktionen. Dies klärt die Frage nach der Gesamtheit der Distributionen $\mathscr{D}'(\mathcal{U})$.

3.1 Faltung einer Distribution. Sei $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definiere die Menge [2]

$$U_\varphi := \{x \in \mathcal{U}\,;\ \operatorname{supp}\varphi(x - \sqcup) \subset \mathcal{U}\}\,.$$

Dann ist U_φ offen und

$$(\varphi * T)(x) := \langle\, \varphi(x-\sqcup)\,, T\,\rangle \text{ für } x \in U_\varphi \tag{3.3}$$

ist wohldefiniert. Es gilt:

(1) Für $T = [f]$ mit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U})$ folgt

$$(\varphi * [f])(x) = (\varphi * f)(x) \text{ falls } x \in U_\varphi\,.$$

(2) Es ist $\varphi * T \in C^\infty(U_\varphi)$ mit Ableitungen $\partial^\alpha(\varphi * T) = (\partial^\alpha\varphi) * T = \varphi * \partial^\alpha T$.

Beweis (1). Es ist

$$(\varphi * [f])(x) = [f](\varphi(x-\sqcup)) = \int_{\mathcal{U}} \varphi(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = (\varphi * f)(x)\;,$$

da $\operatorname{supp}(\varphi(x-\sqcup)) \subset \mathcal{U}$ (setze formal $f = 0$ außerhalb von $\mathcal{U}$). □

Beweis (2). Es sei k_U zu T und U gewählt wie in (2.3). Mit den Differenzenquotienten $\partial_i^h\psi(x) := \frac{1}{h}(\psi(x+h\mathrm{e}_i) - \psi(x))$ ergibt die Linearität von T

$$\partial_i^h(\varphi * T)(x) = \frac{1}{h}(\langle\, \varphi(x+he_i-\sqcup)\,, T\,\rangle - \langle\, \varphi(x-\sqcup)\,, T\,\rangle)$$
$$= \left\langle\, \frac{1}{h}(\varphi(x+he_i-\sqcup) - \varphi(x-\sqcup))\,, T \right\rangle = \langle\, \partial_i^h\varphi(x-\sqcup)\,, T\,\rangle\,.$$

Nun konvergiert $\partial_i^h\varphi(x-\sqcup) \to \partial_i\varphi(x-\sqcup)$ in $C^{k_U}(\overline{U})$ für $h \to 0$, also folgt nach (2.3) für T

[2] Das Leerzeichen $\sqcup$ dient als Leerstelle für das Argument.

$$\left\langle\, \partial_i^h \varphi(x-\sqcup)\,, T \,\right\rangle \longrightarrow \left\langle\, \partial_i \varphi(x-\sqcup)\,, T \,\right\rangle = \big((\partial_i\varphi) * T\big)(x)\,.$$

Dies zeigt, dass die partielle Ableitung $\partial_i(\varphi * T)(x) = \big((\partial_i\varphi) * T\big)(x)$ existiert. Die Aussage für höhere Ableitungen folgt dann induktiv nach der Ordnung der Ableitung. □

3.2 Approximation von Distributionen. Sei $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ und $U \subset\subset \mathcal{U}$ sowie $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine Standard-Dirac-Folge. Für kleines ε ist dann $\varphi_\varepsilon * T \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und für alle $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ konvergiert

$$\langle\, \zeta\,, [\varphi_\varepsilon * T] \,\rangle \longrightarrow \langle\, \zeta\,, T \,\rangle \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Beweis. Es ist

$$\langle\, \zeta\,, [\varphi_\varepsilon * T] \,\rangle = \int_{\mathcal{U}} \zeta(x)\, \underbrace{(\varphi_\varepsilon * T)(x)}_{= T(\varphi_\varepsilon(x-\sqcup))}\, \mathrm{d}x\,.$$

Nun gilt (Beweis siehe unten)

$$\int_{\mathcal{U}} \zeta(x) T\big(\varphi_\varepsilon(x-\sqcup)\big)\, \mathrm{d}x = \left\langle\, \int_{\mathcal{U}} \zeta(x)\varphi_\varepsilon(x-\sqcup)\, \mathrm{d}x\,, T \,\right\rangle. \tag{3.4}$$

Das Argument von T auf der rechten Seite ist $\zeta_\varepsilon(\sqcup)$, wenn $\zeta_\varepsilon := \varphi_\varepsilon^- * \zeta$ mit $\varphi_\varepsilon^-(y) := \varphi_\varepsilon(-y)$. Wenn k_U zu T und U wie in (2.3) gewählt ist, so folgt $\zeta_\varepsilon \to \zeta$ in $\mathcal{C}^{k_U}(\overline{U})$ für $\varepsilon \to 0$, also $\langle\, \zeta_\varepsilon\,, T \,\rangle \to \langle\, \zeta\,, T \,\rangle$. Damit ist gezeigt, dass

$$[\varphi_\varepsilon * T](\zeta) = \langle\, \zeta_\varepsilon\,, T \,\rangle \to \langle\, \zeta\,, T \,\rangle \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Es folgt der Beweis der Identität (3.4): Approximiere ζ gleichmäßig durch Treppenfunktionen ζ_j mit einem gemeinsamen kompaktem Träger in U. Für ζ_j gilt (3.4) wegen der Linearität von T. Die linke Seite konvergiert für $j \to \infty$, da $x \mapsto T(\varphi_\varepsilon(x-\sqcup))$ stetig ist nach 3.1(2). Die rechte Seite konvergiert nach derselben Argumentation wie oben, da $\varphi_\varepsilon^- * \zeta_j \to \varphi_\varepsilon^- * \zeta$ in $\mathcal{C}^{k_D}(\overline{U})$. □

Usually one finds in the literature the convolution of two of distributions, see ????????. Since we do not use this general definition, it is not included here.

4 Andere Funktionenräume

Es sei $\mathcal{U}$ beschränkt und W eine normierter Funktionenraum mit

$$\text{Norm } v \mapsto \|v\|_W\,, \quad \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U}) \subset W\,, \quad \operatorname{clos}_W\left(\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})\right) = W\,. \tag{4.1}$$

Sei $T\colon \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung und es gelte für $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$

$$|T(\zeta)| \le C_T \|\zeta\|_W \le C\|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\mathcal{U}})} \text{ für ein } C \text{ und } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.2}$$

4.1 Theorem. Dann ist $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ eine Distribution und T lässt sich auf eindeutige Weise stetig auf W fortsetzen (die Fortsetzung wird wieder mit T bezeichnet) mit

$$|T(\zeta)| \le C_T \|\zeta\|_W \text{ also } T \in W'\,.$$

Hinweis: Wir schreiben dann auch $\langle \boldsymbol{w}\,, \boldsymbol{T} \rangle_{\boldsymbol{W}} := T(w)$ für $w \in W$.

Beweis. Wegen der ersten Ungleichung von (4.2) ist T auf $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U}) \subset W$ mit der Norm von W stetig, also da linear auch gleichmäßig stetig. Also lässt sich T auf eindeutige Weise unter Beibehaltung der Abschätzung stetig auf W fortsetzen und zwar (benutze (4.1)) eindeutig. Die zweite Ungleichung von (4.2) besagt, dass T eine Distribution ist. □

Dieser Satz lässt sich anwenden auf Distributionen, welche eine Abschätzung wie in (4.2) erfüllen. Wir wenden dies an auf Maße μ und Funktionen g für die $[\mu] \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ und $[g] \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ in 2.5 definiert waren.

4.2 Maße als Funktionale auf $\boldsymbol{\mathcal{C}^0(\mathcal{U})}$. Für eine Maß μ für das $\mathcal{C}_0^0$-Funktionen integrierbar sind und $\mu(\mathcal{U}) < \infty$ ist sei $W := \{\zeta \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U})\,;\ \zeta = 0 \text{ auf } \partial\mathcal{U}\}$, so dass für $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$

$$|\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{\mu} \rangle_{\boldsymbol{W}}| = \left| \int_{\mathcal{U}} \zeta \, \mathrm{d}\mu \right| \le \mu(\mathcal{U}) \|\zeta\|_W = \mu(\mathcal{U}) \|\zeta\|_{C^0(\overline{\mathcal{U}})}\,,$$

also eine Abschätzung (4.2) mit $k = 0$.

4.3 $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(\mathcal{U})}$-Funktionen. Sei $g \in \mathcal{L}^p(\mathcal{U})$ mit $\mathrm{L}^n(\mathcal{U}) < \infty$. Dann gilt für den Raum $W := \mathcal{L}^{p'}(\mathcal{U})$ und $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$

$$|\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{g} \rangle_{\boldsymbol{W}}| = \left| \int_{\mathcal{U}} \zeta g \, \mathrm{dL}^n \right| \le \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{U})} \|\zeta\|_W \le \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{U})} \|1\|_W \|\zeta\|_{C^0(\overline{\mathcal{U}})}\,,$$

also eine Abschätzung (4.2) mit $k = 0$. Beachte, dass nur für $p > 1$ (also $p' < \infty$) aus $T \in W'$ folgt, dass $T = [g]$ für ein $g \in \mathcal{L}^p(\mathcal{U})$.

Die Sobolev-Funktionen in $W^{m,p}(\mathcal{U})$ und Funktionen in $BV(\mathcal{U})$ sind weitere Beispiele.
kommt später

5 Beispiele allgemeinerer Definitionen

We now give some generalizations of the notion of distribution. It is based on the general definition (2.1) (see also 2.1).

5.1 Generalization. We consider, see (2.1),

$$\{\, T : C_0^\infty(\mathcal{U}; Y_1) \to Y_0 \ ;\ T \text{ is linear } \}$$

where T satisfies (2.3) with appropriate norms. Besides Banach spaces Y_0 and Y_1 we assume that a Banach space Y_2 is given. Furthermore, let a bilinear (if $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) map

$$b : Y_1 \times Y_2 \to Y_0$$

be given satisfying the property of a ***Banach product***

$$\|b(y_1, y_2)\|_{Y_0} \leq \|y_1\|_{Y_1} \cdot \|y_2\|_{Y_2} \,.$$

We consider a map

$$f \in L^1_{loc}(\mathcal{U}; Y_2) \ \longmapsto\ [f] : C_0^\infty(\mathcal{U}; Y_1) \to Y_0$$

given by

$$\langle \zeta \,, [f] \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \int_{\mathcal{U}} b(\zeta(x), f(x))\,\mathrm{d}x \in Y_0.$$

We have several choices for the map b:

- b scalar multiplication $(Y_0, Y_1, Y_2) = (Y, \mathbb{K}, Y)$ and $(y_1, y_2) \mapsto b(y_1, y_2) := y_1 y_2$,
- b dual product $(Y_0, Y_1, Y_2) = (\mathbb{K}, Y, Y^*)$ and $(y_1, y_2) \mapsto b(y_1, y_2) := \langle y_1 \,, y_2 \rangle_Y$,
- b inner product $(Y_0, Y_1, Y_2) = (\mathbb{K}, Y, Y)$ and $(y_1, y_2) \mapsto b(y_1, y_2) := (\, y_1 \,,\, y_2 \,)_Y$.

If Y_0 is different from $\mathbb{K}$, then the proof of 11.1 does not apply, but it can be generalized to certain cases.

The “inner product” has also the names “scalar product” or “dot product”:

5.2 Beispiel mit Skalarmultiplikation. Sei Y ein beliebiger Banachraum und setze

$$(Y_0, Y_1, Y_2) = (Y, \mathbb{K}, Y).$$

Es ist dann

$$f \in L^1_{loc}(\mathcal{U}; Y) \longmapsto [f] : \mathscr{D}(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \to Y$$

definiert und zwar für $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ durch

$$\langle \zeta \,, [f] \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \int_{\mathcal{U}} \zeta(x) f(x)\,\mathrm{d}x \ \in Y.$$

5.3 Beispiel mit dualem Produkt. Sei Y ein beliebiger Banachraum und setze für das Tripel $(Y_0, Y_1, Y_2) = (\mathbb{K}, Y, Y^*)$. Es ist dann

$$f \in L^1_{loc}(\mathcal{U}; Y^*) \longmapsto [f] \in \mathscr{D}'(\mathcal{U}; Y)$$

definiert und zwar für $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}; Y)$ durch

$$\boldsymbol{\langle \zeta \, , [f] \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})}} := \int_{\mathcal{U}} \boldsymbol{\langle \zeta(x) \, , f(x) \rangle_Y} \, \mathrm{d}x \ \in \mathbb{K}.$$

Definition: Das ***duale Produkt*** ist definiert durch $(y, y') \mapsto \boldsymbol{\langle y \, , y' \rangle_Y} := y'(y)$.

5.4 Beispiel mit Skalarprodukt. Nun sei Y ein Hilbertraum und setze für das Tripel $(Y_0, Y_1, Y_2) = (\mathbb{K}, Y, Y)$. Es ist dann

$$f \in L^1_{loc}(\mathcal{U}; Y) \longmapsto [f] \in \mathscr{D}'(\mathcal{U}; Y)$$

definiert und zwar für $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}; Y)$ durch

$$\boldsymbol{\langle \zeta \, , [f] \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})}} := \int_{\mathcal{U}} (\, \zeta(x) \, , \, f(x) \,)_Y \, \mathrm{d}x \ \in \mathbb{K}.$$

Definition: Das ***Hilbertraumprodukt*** ist definiert durch $(y_1, y_2) \mapsto (\, y_1 \, , \, y_2 \,)_Y$.

5.5 Beispiel eines endlich dimensionalen Raumes. Sei $Y = \mathbb{R}^M$ ein Euklidischer Raum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) und $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U}; \mathbb{R}^M)$. Wenn $(Y_0, Y_1, Y_2) = (\mathbb{R}, Y, Y)$ in 5.1, so ist T auf $\mathscr{D}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^M)$ linear. Für $i = 1, \ldots, M$ ist

$$T_i \in \mathscr{D}'(\mathcal{U}; \mathbb{R}), \text{ wenn } \boldsymbol{\langle \eta \, , T_i \rangle} := \boldsymbol{\langle \eta \mathbf{e}_i \, , T \rangle} \in \mathbb{K} \text{ für } \eta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}; \mathbb{R}).$$

Es folgt

$$\boldsymbol{\langle \zeta \, , T \rangle} = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{\langle \zeta \bullet \mathbf{e}_i \, , T_i \rangle} \, .$$

Zum Beispiel wird $M = N^2$ sein für die Fundamentallösungen in Abschnitt 7.

Beweis. Es ist für $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^M)$

$$\zeta = \sum_{i=1}^{M} \zeta_i \mathbf{e}_i \text{ wenn } \zeta_i := \zeta \bullet \mathbf{e}_i \, ,$$

und daher

$$\boldsymbol{\langle \zeta \, , T \rangle} = \boldsymbol{\left\langle \sum_{i=1}^{M} \zeta_i \mathbf{e}_i \, , T \right\rangle} = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{\langle \zeta_i \mathbf{e}_i \, , T \rangle} = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{\langle \zeta_i \, , T_i \rangle} \, .$$

$\square$

6 Flächen

Here we define special distributions on a given surface. It means that the functions are defined on a manifold M, which is a submanifold $M \subset \mathcal{U}$ without boundary, where $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ is an open set, the local test set.

6.1 Smooth surfaces. Consider a regular d-dimensional set $M \subset \mathcal{U}$ (for our purpose a $\mathcal{C}^2$-surface without boundary), where $0 \leq d \leq n$ is an integer. We denote its tangent space in x by $T_x(M)$. The measure on M is the d-dimensional Hausdorff measure [3]

$$\mathrm{H}^d \llcorner M$$

(which for $\mathcal{C}^2$ surfaces is the same as the usual surface measure). To this measure there exists a distribution $\boldsymbol{\mu}_M$ given by (see 2.5(1))

$$\langle \zeta , \boldsymbol{\mu}_M \rangle := \int_M \zeta(y) \,\mathrm{dH}^d(y) \text{ for } \zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}) .$$

Beweis. We have to show that $\boldsymbol{\mu}_M$ is a distribution in $\mathscr{D}'(\mathcal{U})$. For an open set $U \subset\subset \mathcal{U}$ and $\operatorname{supp} \zeta \subset U$ we compute

$$|\langle \zeta , \boldsymbol{\mu}_M \rangle| = \left| \int_M \zeta \,\mathrm{dH}^d \right| \leq \int_M |\zeta| \,\mathrm{dH}^d \leq \|\zeta\|_{\mathcal{C}^0(\overline{U})} \cdot \mathrm{H}^d(M \cap U) ,$$

d.h. $k_U = 0$ und $C_U = \mathrm{H}^d(M \cap U)$ in der Definition 2.2. □

Hence the measure on surfaces is a distribution of order 0. This means that these distributions are defined for $\mathcal{C}^0$-functions, and first derivatives of it for $\mathcal{C}^1$-functions.

6.2 Definition (of function spaces). We say $g \in \mathcal{C}^1(M)$, if locally $g \circ \chi \in \mathcal{C}^1(U_\chi)$, where $\chi : U_\chi \subset \mathbb{R}^d \to M$ is a local parametrization of M. We say $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(M)$, if $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathrm{H}^d \llcorner M)$. *Remark:* $\mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$ for measures μ is the original space.

6.3 Lemma. If $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(M)$ then $g\boldsymbol{\mu}_M$ is a distribution, i.e. $g\boldsymbol{\mu}_M \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$.

Beweis. Für $U \subset\subset \mathcal{U}$ und $\operatorname{supp} \zeta \subset U$ ist

$$|\langle \zeta , g\boldsymbol{\mu}_M \rangle| = \left| \int_M \zeta g \,\mathrm{dH}^d \right| \leq \|\zeta\|_{\mathcal{C}^0(\overline{U})} \int_{\overline{U}} |g| \,\mathrm{dH}^d ,$$

d.h. $k_U = 0$ und

$$C_U = \int_{\overline{U}} |g| \,\mathrm{dH}^d .$$

□

We now consider a differential equation

$$\operatorname{div} Q = G \text{ in } \mathscr{D}'(\mathcal{U}) \tag{6.1}$$

[3] wir bezeichnen das d-dimensionale Hausdorff-Maß in jedem $\mathbb{R}^n$ mit H^d

with given quantities

$$Q = q\boldsymbol{\mu}_M \quad G = g\boldsymbol{\mu}_M \,,$$

where $q_i, g \in \mathcal{L}^1_{loc}(M)$. By 6.3, Q_i and G are distributions (of order 0). Equation (6.1) is a distributional equation. We want to know how the strong version of this distributional equation reads. For this strong version we need the definitions of differential operators on M.

6.4 Definition. We define the following derivatives with respect to M. For this $\{\tau_1(x), \dots, \tau_d(x)\}$ is an orthonormal system of the tangent space $T_x(M)$ in x.

(1) ∂_τ is the directional derivative in tangential direction τ.

(2) $\nabla^M g := \sum_{k=1}^d (\partial_{\tau_k} g)\tau_k$.

(3) $\mathrm{div}^M q := \sum_{k=1}^d \tau_k \bullet \partial_{\tau_k} q$.

(4) $\kappa^M := \sum_{k=1}^d \partial_{\tau_k}\tau_k$ ist ein Normalenfeld, die ***Krümmung*** von M.

These definitions are independent of the choice of $\{\tau_1(x), \dots, \tau_d(x)\}$.

Wir beweisen das

6.5 Theorem. Sei $q_i, g \in \mathcal{C}^1(M)$, $i = 1, \dots, n$. Dann ist äquivalent:

(1) *Schwache Formulierung:*

$$\mathrm{div}(q\boldsymbol{\mu}_M) = (\text{bzw. } \le)\; g\boldsymbol{\mu}_M \text{ in } \mathscr{D}'(\mathcal{U}).$$

(2) *Starke Formulierung:*

$$q \in T(M) \text{ und } \mathrm{div}^M q = (\text{bzw. } \le)\; g \text{ auf } M.$$

Bemerkung: Dies gilt auch unter schwächeren Voraussetzungen, siehe 6.6.
Definition: Die Menge $T(M)$ besteht aus Funktionen q auf M, die punktweise $q(x) \in T_x(M)$ für $x \in M$ erfüllen.

Die Tatsache, dass q ein tangentiales Vektorfeld ist, ist Konsequenz der distributionellen Differentialgleichung 6.5(1).

Beweis (2)⇒(1). Die Differentialgleichung impliziert für nichnegative lokale Testfunktionen $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U})$, $\zeta \ge 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_M \zeta \cdot \big(- \mathrm{div}^M q + g \big) \,\mathrm{dH}^d \\ &= - \int_M \mathrm{div}^M(\zeta q) \,\mathrm{dH}^d + \int_M \Big((\nabla^M \zeta)\bullet q + \zeta \cdot g \Big) \,\mathrm{dH}^d \,. \end{aligned}$$

Since q, by (2), is a tangential vector field, the first integral is 0 by integration by parts on M, and the second integral equals

$$\begin{aligned} &= \int_M \Big(\nabla\zeta \bullet q + \zeta \cdot g \Big) \,\mathrm{dH}^d \\ &= \langle \boldsymbol{\nabla\zeta} \,, \boldsymbol{q\mu_M} \rangle + \langle \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{g\mu_M} \rangle = \langle \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{-\,\mathrm{div}(q\mu_M) + g\mu_M} \rangle \,. \end{aligned}$$

This is (1), that is $-\mathrm{div}(q\boldsymbol{\mu}_M) + g\boldsymbol{\mu}_M \ge 0$. $\square$

Beweis (1)⇒(2). The distributional inequality says

$$0 \leq \int_M (\nabla\zeta \bullet q + \zeta \cdot f)\, \mathrm{dH}^d \tag{6.2}$$

for all nonnegative $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U})$. This then also holds for all $\mathcal{C}^1$-functions ζ with compact support in M. Set

$$\zeta = \eta \cdot (1 + \sin(a\psi)) \geq 0\,,$$

where $\eta \geq 0$ is a nonnegative testfunction, $a \in \mathbb{R}$, and ψ is any $\mathcal{C}^1$-function vanishing on M. Then

$$\nabla\zeta = (1 + \sin(a\psi))\nabla\eta + \eta\cos(a\psi)a\nabla\psi\,.$$

Since $\psi = 0$ on M, this is equal to

$$\nabla\zeta = \nabla\eta + \eta a \nabla\psi \quad \text{ on } M\,.$$

Therefore (6.2) implies

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M (\nabla\zeta \bullet q + \zeta \cdot f)\, \mathrm{dH}^d \\ &= \int_M (\nabla\eta \bullet q + \eta \cdot f)\, \mathrm{dH}^d + a \int_M \eta \nabla\psi \bullet q\, \mathrm{dH}^d\,. \end{aligned}$$

Since a is an arbitrary number, it follows that the additional a-term has to vanish, that is

$$\int_M \eta\nabla\psi \bullet q\, \mathrm{dH}^d = 0\,.$$

Since this is true for all nonnegative test functions η, we conclude that

$$\nabla\psi \bullet q = 0 \quad \text{ on } M.$$

One can choose ψ so that $\mathbf{n} = \nabla\psi$ on M with a local $\mathcal{C}^1$ normal field $\mathbf{n}$ (not necessary a unit normal), hence $\mathbf{n}(x) \in T_x(M)^\perp$ at $x \in M$. Doing so one concludes that

$$q(x) \in T_x(M).$$

With this property (6.2) becomes for all nonnegative test functions ζ and with a tangential vector field q

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M (\nabla\zeta \bullet q + \zeta \cdot f)\, \mathrm{dH}^d = \int_M (\nabla^M\zeta \bullet q + \zeta \cdot f)\, \mathrm{dH}^d \\ &= \underbrace{\int_M \mathrm{div}^M(\zeta q)\, \mathrm{dH}^d}_{=0} \quad + \int_M \zeta(-\,\mathrm{div}^M q + f)\, \mathrm{dH}^d\,. \end{aligned}$$

Here we have used integration by parts on M. Since the nonnegative test function ζ is arbitrary, we conclude

$$\mathrm{div}^M q \leq f \text{ on } M. \tag{6.3}$$

This proves (2). □

6.6 Remark on Theorem. Let $q_i, g \in \mathcal{L}^1_{loc}(M)$. Then 6.5 is still true, if the equations in 6.5(2) are supposed to hold almost everywhere on M.

6.7 Appendix. The statement 6.5(1) holds only if the flux is a tangential vector field. For a general $q \in \mathcal{C}^1(M;\mathbb{R}^n)$ we have for $\zeta \in \mathcal{C}^1(M;\mathbb{R})$ that $f := \zeta q$ satisfies

$$\int_M \big(\operatorname{div}^M f + \kappa^M \bullet f\big)\, \mathrm{dH}^d = 0$$

Beweis. We can assume that ζ is a local function and therefore we let $q = q_{tan} + r\mathbf{n}$ with a local unit normal vector $\mathbf{n}$. Then we compute

$$\begin{aligned}&\nabla^M \zeta \bullet q = \nabla^M \zeta \bullet q_{tan} = \nabla \zeta \bullet q_{tan}\,,\\ &\operatorname{div}^M(r\mathbf{n}) + \kappa^M \bullet (r\mathbf{n}) = r\big(\operatorname{div}^M \mathbf{n} + \kappa^M \bullet \mathbf{n}\big) = 0\,,\end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned}&\int_M \big(\operatorname{div}^M(\zeta q) + \kappa^M \bullet (\zeta q)\big)\, \mathrm{dH}^d\\ &= \int_M \big(\nabla^M \zeta \bullet q + \zeta\big(\operatorname{div}^M q + \kappa^M \bullet q\big)\big)\, \mathrm{dH}^d\\ &= \int_M \big(\nabla \zeta \bullet q_{tan} + \zeta\big(\operatorname{div}^M q_{tan} + \operatorname{div}^M(r\mathbf{n}) + \kappa^M \bullet (r\mathbf{n})\big)\big)\, \mathrm{dH}^d\\ &= \int_M \big(\nabla \zeta \bullet q_{tan} + \zeta \operatorname{div}^M q_{tan}\big)\, \mathrm{dH}^d = 0\end{aligned}$$

by the theorem 6.5. □

In Bearbeitung

7 Fundamentallösungen

Eine wesentliche Anwendung auf dem Gebiet der Distributionen ist der Begriff der Fundamentallösung von Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Zu jedem Differentialoperator sind die Fundamentallösungen charakteristische Singularitätenfunktionen (oder allgemeiner Distributionen), die dann in allen Integraldarstellungen auftreten.

Wir beginnen mit der Definition von linearen Differentialoperatoren. Im Folgenden sei immer $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ein allgemeiner linearer klassischer Differentialoperator ist eine Abbildung von $\mathcal{C}^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^N)$ nach $\mathcal{C}^0(\mathcal{U};\mathbb{R}^M)$:

7.1 Lineare Differentialoperatoren. Es seien N und M natürliche Zahlen. Ein (klassischer) ***linearer Differentialoperator*** der Ordnung $m \geq 0$ auf $\mathcal{U}$ ist eine Abbildung

$$L:\ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^N) & \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{U};\mathbb{R}^M) \\ u & \mapsto & L(u)\,, \end{array}$$

so dass für $u \in \mathcal{C}^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^N)$ und $x \in \mathcal{U}$ der Wert $L(u)(x) \in \mathbb{R}^M$ eine Linearkombination der partiellen Ableitungen $\partial^\alpha u(x)$ für $|\alpha| \leq m$ ist. Also hat L die folgende Darstellung:

$$L(u)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x)\,.$$

Dabei sind die $a_\alpha(x) \in \mathbb{R}^{M\times N}$, d.h. $M \times N$-Matrizen. Die abkürzende Schreibweise dafür ist

$$L(u) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u \quad \text{in } \mathcal{U}.$$

Behauptung: Die a_α sind notwendigerweise stetig und eindeutig bestimmt. Dies gilt für klassische lineare Differentialoperatoren L. *Definition:* Die eindeutig bestimmten a_α heißen die ***Koeffizienten*** von L. Wir sagen, L ist ein linearer Differentialoperator mit ***konstanten Koeffizienten*** (bzw. $\mathcal{C}^\infty$-Koeffizienten oder analytischen Koeffizienten, usw.), wenn die Koeffizientenfunktionen $x \mapsto a_\alpha(x)$ von x unabhängig sind (bzw. unendlich oft differenzierbare Funktionen sind oder reell analytische Funktionen sind, usw.).

Beweis der Stetigkeit. Sei $x_0 \in \mathcal{U}$. Betrachte für beliebigen Multiindex β das ***Monom***

$$p_\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ gegeben durch}$$
$$p_\beta(x) := \frac{(x-x_0)^\beta}{\beta!} := \prod_{i=1}^n \frac{(x-x_0)^{\beta_i}}{\beta_i!}\,. \tag{7.1}$$

Dann folgt für die Ableitungen von p_β [4]

$$\partial^\alpha p_\beta(x) = \begin{cases} p_{\beta-\alpha}(x) & \text{falls } \alpha \leq \beta, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{7.2}$$

[4] Definition: $\alpha \leq \beta$ bedeutet, dass $\alpha_i \leq \beta_i$ für alle i.

und daher $\partial^\alpha p_\beta(x_0) = \delta_{\alpha,\beta}$. Sei nun $|\beta| \le m$. Es kann ohne Einschränkung $M = N = 1$ angenommen werden. Dann gilt [5]

$$L(p_\beta) = \sum_{\alpha\le\beta} a_\alpha \partial^\alpha p_\beta = a_\beta + \sum_{\alpha<\beta} a_\alpha p_{\beta-\alpha}\,.$$

Nun ist $\sum_{\alpha<\beta} a_\alpha p_{\beta-\alpha}$ stetig, falls a_α stetig ist für $\alpha < \beta$. Da $L(p_\beta)$ stetig ist, folgt dann, dass a_β stetig ist. Damit ist die Stetigkeit der a_β induktiv in β gezeigt. $\square$

Beweis der Eindeutigkeit. Falls $L = 0$, dann folgt wie oben induktiv in β, dass $a_\beta = 0$. $\square$

7.2 Skalare Operatoren. Sei L ein linearer Differentialoperator wie in 7.1. Dann kann L geschrieben werden als

$$L(u) = \left(\sum_{j=1}^N L_{ij}(u_j)\right)_{i=1,\dots,M}\,,$$

wobei $L_{ij} : \mathcal{C}^m(\Omega) \to \mathcal{C}^0(\Omega)$ ***skalare Differentialoperatoren*** sind mit der Darstellung

$$L_{ij}(v)(x) = \sum_{|\alpha|\le m} (a_\alpha)_{ij}(x)\partial^\alpha v(x),$$
$$a_\alpha(x) = ((a_\alpha)_{ij}(x))_{i=1,\dots,M;j=1,\dots,N}\,.$$

7.3 Transponierter Operator. Sei $L : \mathcal{C}^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{U};\mathbb{R}^M)$ ein klassischer linearer Differentialoperator wie in 7.1 von der Ordnung m

$$L(u) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha u \quad \text{ mit } a_\alpha \in \mathcal{C}^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^{M\times N})$$

Dann gibt es genau ein $L^{\mathrm{T}}: \mathcal{C}^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^M) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{U};\mathbb{R}^N)$, einen klassischen linearen Differentialoperator der Ordnung m mit

$$\int_\Omega L^{\mathrm{T}}(v)\bullet u \,\mathrm{dL}^n = \int_\Omega v\bullet L(u)\,\mathrm{dL}^n$$

für alle $u \in \mathcal{C}_0^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^N)$ und alle $v \in \mathcal{C}_0^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^M)$. Der Differentialoperator L^{T} ist gegeben durch

$$L^{\mathrm{T}}(v) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha({a_\alpha}^{\mathrm{T}} v).$$

Wir nennen L^{T} den zu L ***transponierten Operator*** oder ***formal adjungierten Operator***. Es ist $L^{\mathrm{TT}} = L$.

Beweis. Es gilt für alle u, v wie oben angegeben

$$\int_\mathcal{U} v\bullet L(u)\,\mathrm{dL}^n = \sum_{|\alpha|\le m}\int_\mathcal{U} v\bullet(a_\alpha\partial^\alpha u)\,\mathrm{dL}^n$$
$$= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\mathcal{U} ({a_\alpha}^{\mathrm{T}} v)\bullet\partial^\alpha u\,\mathrm{dL}^n = \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\int_\mathcal{U}\partial^\alpha({a_\alpha}^{\mathrm{T}} v)\bullet u\,\mathrm{dL}^n$$

[5] Definition: Dabei bedeutet $\alpha < \beta$, dass $\alpha \le \beta$ und $\alpha \ne \beta$.

nach partieller Integration. Sei nun $M : \mathcal{C}^m(\mathcal{U};\mathbb{R}^M) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{U};\mathbb{R}^N)$ ein linearer Differentialoperator mit

$$\int_{\mathcal{U}} M(v)\bullet u \,\mathrm{dL}^n = \int_{\mathcal{U}} v\bullet L(u)\,\mathrm{dL}^n$$

für alle u, v wie oben angegeben. Dann ist

$$\int_{\mathcal{U}} M(v)\bullet u \,\mathrm{dL}^n = \int_{\mathcal{U}} \Big(\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha({a_\alpha}^{\mathrm{T}} v)\Big)\bullet u\,\mathrm{dL}^n \,.$$

Da dies für alle Funktionen u gilt, folgt

$$M(v) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha({a_\alpha}^{\mathrm{T}} v)\,.$$

Dass dies ein linearer Differentialoperator wie in 7.1 ist, folgt aus der ***Leibniz-Regel***

$$\partial^\alpha(vw) = \sum_{\beta\,:\,0\le\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}v\cdot\partial^\beta w$$

für Funktionen $v, w \in \mathcal{C}^m(\mathcal{U};\mathbb{R})$, wobei

$$\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Wenden wir nun diese Leibniz-Regel an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} M(v) &= \sum_{\alpha:|\alpha|\le m}\ \sum_{\beta\,:\,0\le\beta\le\alpha} (-1)^{|\alpha|}\binom{\alpha}{\beta}\,\partial^{\alpha-\beta}\,{a_\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\partial^\beta v \\ &= \sum_{\beta:|\beta|\le m}\Bigg(\sum_{\alpha\,:\,|\alpha|\le m,\ \alpha\ge\beta} (-1)^{|\alpha|}\binom{\alpha}{\beta}\,\partial^{\alpha-\beta}\,{a_\alpha}^{\mathrm{T}}\Bigg)\,\partial^\beta v, \end{aligned}$$

was eine Darstellung wie in 7.1 ist. □

7.4 Bemerkung. Sei $L(u) = \Big(\sum_{j=1}^N L_{ij}(u_j)\Big)_{i=1,\dots M}$. Dann ist

$$(L_{ij})^{\mathrm{T}} = (L^{\mathrm{T}})_{ji}.$$

7.5 Distributional definition. If L is an operator as in 7.1 and the coefficients $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U};\mathbb{R}^{M\times N})$, then the operator L for a distribution $S \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};\mathbb{R}^N)$ is defined as

$$L(S) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\partial^\alpha S \quad \text{ in } \mathscr{D}'(\mathcal{U};\mathbb{R}^M).$$

Here we used the matrix multiplication of a vector valued distribution, that is, for $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U};\mathbb{R}^M)$

$$\boldsymbol{\langle \zeta\,, L(S)\rangle = \langle L^{\mathrm{T}}(\zeta)\,, S\rangle = \sum_{|\alpha|\le m}\langle {a_\alpha}^{\mathrm{T}}\zeta\,,\partial^\alpha S\rangle}.$$

Nachdem wir nun lineare Differentialoperatoren definiert haben, sind wir in der Lage Fundamentallösungen zu betrachten, und zwar für den allgemeinen Fall eines Systems.

7.6 Fundamentallösungen. Sei

$$L : \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^M)$$

ein linearer Differentialoperator wie in 7.1 mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt [6]

$$F = (F_{jk})_{j=1,\dots,N;k=1,\dots,M} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{N\times M})$$

Fundamentallösung zu L, falls

$$L(F) = \boldsymbol{\delta}_0 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^M} \tag{7.3}$$

im Raum der Distributionen $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{M\times M})$. Die Definition (7.3) lautet

$$\boldsymbol{\big\langle L^{\mathrm{T}}\zeta\,,F\big\rangle} = \boldsymbol{\langle\zeta\,,LF\rangle} = \operatorname{trace}\zeta(0) \quad \text{für } \zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M). \tag{7.4}$$

Mit Indizes: Es ist

$$F = (F_{jk})_{j=1,\dots,N;k=1,\dots,M} \text{ mit } F_{jk} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$$

und die Eigenschaft (7.3) lautet für $i,k = 1,\dots,M$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$

$$\sum_{j=1}^N L_{ij}(F_{jk}) = \begin{cases} \boldsymbol{\delta}_0 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.5}$$

Alternativen: The equation (7.5) can also be written for $i,k = 1,\dots,M$ as

$$\sum_{j=1}^N L_{ij}(F_{jk}) = \delta_{i,k}\boldsymbol{\delta}_0\,. \tag{7.6}$$

Writing this for test functions $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ it becomes for $i,k = 1,\dots,M$

$$\sum_{j=1}^N \boldsymbol{\langle\zeta\,,L_{ij}(F_{jk})\rangle} = \delta_{i,k}\zeta(0)\,. \tag{7.7}$$

Replacing ζ by ζ_{ik} and summing over i and k one obtains that for all $\zeta = (\zeta_{ik})_{i,k=1,\dots,M} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{M\times M})$

$$\sum_{i,k=1}^M \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\langle\zeta_{ik}\,,L_{ij}(F_{jk})\rangle} = \sum_{ik} \delta_{i,k}\zeta_{ik}(0) = \sum_k \zeta_{kk}(0)\,. \tag{7.8}$$

Now taking instead of ζ_{ik} a function ζ_i and summing over i one obtains that for all $\zeta = (\zeta_i)_{i=1,\dots,M} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^M)$

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{\langle\zeta_i\,,L_{ij}(F_{jk})\rangle} = \sum_i \delta_{i,k}\zeta_i(0) = \zeta_k(0)\,. \tag{7.9}$$

[6] $\mathbb{R}^{N\times M}$ ist die Menge der $N\times M$-Matrizen.

Erläuterung: Here the operator L applied to a matrix F is defined by matrix multiplication. F maps into $N \times M$-matrices, the coefficients of L into $M \times N$-matrices, so that finally $L(F)$ maps into $M \times M$-matrices. ***Hinweis:*** Die Definition einer Fundamentallösung für Systeme findet man in der Literatur in der Regel nicht.

Also handelt es sich bei der Fundamentallösung um eine Distributionslösung des Operators L.

7.7 Spezialfall einer Gleichung (N=M=1). Sei $L : \mathcal{C}^m(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt eine Distribution $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ eine ***Fundamentallösung*** von L, wenn

$$L(F) = \boldsymbol{\delta}_0 \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})\,.$$

Oft haben Fundamentallösungen eine Dichte bezüglich des Lebesguemaßes.

7.8 Spezialfall einer Funktion als Fundamentallösung. Sei $F = (F_{jk})_{jk} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{N\times M})$. Ist $[F] := ([F_{jk}])_{jk}$ eine (distributionalle) Fundamentallösung, so nennen wir auch F eine ***Fundamentallösung***.

References: Tréves [14], Alt [3].

Wir geben nun einige wichtige Fundamentallösungen an, hier ist eine Liste der in dieser Veröffentlichung behandelten Differentialoperatoren:

- $L(u) := u'$ (see 7.9(1))
- $L(u) := u''$ (see 7.9(2))
- $L(u) := u' - Au$ (see 7.13)
- $L(u) := \operatorname{div} u$ (see 8.2)
- $L(u) := \partial_i u$ (see 7.14)
- $L(u) := \partial_{\overline{z}} u = \frac{1}{2}\big(\partial_{x_1} u + \mathrm{i}\,\partial_{x_2} u\big)$ (see 8.9)
- $L(u) := -\Delta u$ (see 8.3)
- $L(u) := \partial_t u - \Delta u$ (see 9.2)
- $L(u) := \partial_t^2 u - \Delta u$ (see 9.6)

Es gibt auch Differetialgleichungen, welche keine Fundamentallösung haben, unter ihnen der Gradientenoperator, den wir in Abschnitt 10 behandeln. Falls $M = N = 1$ ist, gibt es jedoch immer eine Fundamentallösung, wie das Theorem von Ehrenpreis sagt.

Als einfachstes Beispiel geben wir die Fundamentallösungen zweier gewöhnlicher Differentialoperatoren an. Diese Fundamentallösungen sind Funktionen.

7.9 Gewöhnliche Differentialgleichung. Es sei $n = 1$ und der skalare Fall $N = M = 1$ in 7.6 (genauer: 7.8) gegeben. Dann gilt:

(1) Für $L(u) := u'$ für $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ definiert

$$F(x) := \mathcal{X}_{[0,\infty[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung $F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. Jede andere Fundamentallösung aus $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ ist bis auf eine additive Konstante gleich F.

(2) Für $L(u) := u''$ für $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ definiert

$$F(x) := \frac{1}{2}|x|$$

eine Fundamentallösung $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Jede andere Fundamentallösung aus $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ ist bis auf eine (affin) lineare Funktion gleich F.

Wir werden in 7.13 noch eine Verallgemeinerung des Differentialoperators von 7.9(1) kennenlernen. Die Fundamentallösung in 7.9(1) ist die Heaviside-Funktion 2.6(2).

Beweis (1). Sei $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, [\boldsymbol{F}]' \rangle = \int_{\mathbb{R}} (-\zeta'(x))F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \zeta'(x)\,\mathrm{d}x = \zeta(0) = \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta_0} \rangle .$$

Ist $\widetilde{F} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ eine weitere Fundamentallösung, so gilt $[F - \widetilde{F}]' = 0$. Dann folgt $F - \widetilde{F}$ ist fast überall eine konstante Funktion (ein Polynom 0-ten Grades). □

Beweis (2). Es gilt

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, [\boldsymbol{F}]'' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \zeta''(x)F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \zeta''(x)\frac{-x}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \zeta''(x)\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}\zeta'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{1}{2}\zeta'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Partielle Integration)}$$

$$= \frac{1}{2}\zeta(0) + \frac{1}{2}\zeta(0) = \zeta(0) = \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta_0} \rangle .$$

Ist $\widetilde{F} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ eine andere Fundamentalösung, so folgt aus $[F - \widetilde{F}]'' = 0$, dass $F - \widetilde{F}$ fast überall eine affin lineare Funktion ist. □

Fundamentallösungen werden dazu benutzt, Integraldarstellungen von Lösungen der Differentialgleichung herzuleiten, d.h. eine Integraldarstellung von u durch g, wenn die Differentialgleichung $L(u) = g$ erfüllt ist. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $L(u) := u'$.

7.10 Integraldarstellung für $\boldsymbol{u'}$. Sei $I =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, $u, g \in \mathcal{L}^1(I)$, $x_0 \in \overline{I}$. Dann sind äquivalent:

(1) $[u]' = [g]$ in $\mathscr{D}'(I)$.

(2) Es gibt ein $u_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x g(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für fast alle } x \in I.$$

Beachte: Ist $I = \mathbb{R}$ und hat g kompakten Träger, so ist das Integral gleich

$$F * g(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} g(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{7.10}$$

wobei F die Fundamentallösung aus 7.9(1) ist. Es ist also $u := F * g$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $[u]' = [g]$.

Die rechte Seite dieser Identität ist stetig in x. Dies bedeutet, dass $u \in \mathcal{L}^1(I)$ einen stetigen Repräsentanten besitzt.

Beweis (2) ⇒ (1). Eine Änderung von x_0 bewirkt nur eine Änderung von u_0, also sei ohne Einschränkung $x_0 = a$. Dann ist für $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$

$$\begin{aligned}\langle \zeta\,, [u]' \rangle_{\mathscr{D}'(I)} &= -\int_I \zeta'(x)u(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_I \zeta'(x)u_0\,\mathrm{d}x - \int_a^b \zeta'(x)\int_a^x g(y)\,\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Mit partieller Integration ist der erste Summand

$$= -\int_I \zeta'(x)\,\mathrm{d}x \cdot u_0 = 0,$$

und mit dem Satz von Fubini ist der zweite Summand

$$= -\int_a^b g(y)\left(\int_y^b \zeta'(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(y)\zeta(y)\,\mathrm{d}y = \langle \zeta\,, [g] \rangle_{\mathscr{D}'(I)}.$$

□

Beweis (1) ⇒ (2). Definiere

$$\widetilde{u}(x) := \int_a^x g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Es gilt $[\widetilde{u}]' = [g]$ (siehe im Beweisteil ((2) ⇒ (1))), also muss $[u - \widetilde{u}]' = 0$ sein. Somit folgt $u - \widetilde{u} = u_0$ fast überall für ein $u_0 \in \mathbb{R}$, konsequenterweise gilt für fast alle $x \in I$

$$u(x) = u_0 + \widetilde{u}(x) = u_0 + \int_a^x g(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

Wir bringen nun eine Verallgemeinerung von (7.10) für allgemeine Differentialoperatoren L, und zwar kann man für die Differentialgleichung $L(u) = g$ mit Hilfe der Fundamentallösung F bei gegebenem g durch $u := F * g$ eine partikuläre Lösung erhalten. Dies geht auf jeden Fall für glatte Funktionen g mit kompaktem Träger, siehe Satz 7.12.

7.11 Motivation. Sei F eine $\mathcal{L}^1_{loc}$-Fundamentallösung des Differentialoperators L im Falle $N = M = 1$, also

$$L[F] = \delta_0.$$

Damit gilt für eine Verschiebung des Ursprungs unter Ausnutzung der Voraussetzung, dass L konstante Koeffizienten hat,

$$L[F(\sqcup - x_0)] = \delta_{x_0}. \tag{7.11}$$

Darüber hinaus gilt wegen der Linearität von L für $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ und $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$

$$L\big[\sum_{i=1}^{m} c_i F(\sqcup - x_i)\big] = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta_{x_i}\,,$$

was also ein ***Superpositionsprinzip*** bedeutet. Bei richtiger Belegung der c_i strebt die rechte Seite gegen $[g]$ und dann das Argument von L auf der linken Seite gegen $[F * g]$. Diese heuristische Betrachtung motiviert die Vermutung, dass $[F * g]$ die Gleichung $L[u] = [g]$ löst. Siehe dazu den folgenden Satz.

Beweis. Der Beweis von (7.11) ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta\,, L[F(\sqcup - x_0)]\,\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (L^{\mathrm{T}}(\zeta))(x)\, F(x - x_0)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (L^{\mathrm{T}}(\zeta))(x + x_0)\, F(x)\, \mathrm{d}x = \big\langle L^{\mathrm{T}}(\zeta(\sqcup + x_0))\,, [F]\,\big\rangle \\
&= \langle \zeta(\sqcup + x_0)\,, L[F]\,\rangle = \langle \zeta(\sqcup + x_0)\,, \delta_0\,\rangle \\
&= \zeta(x + x_0)|_{x=0} = \zeta(x_0) = \langle \zeta\,, \delta_{x_0}\,\rangle\,.
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist in der Tat richtig: Zerlegt man den $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig in Quader Q_i der Kantenlänge ε und wählt $g \in \mathcal{L}^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $c_i := \int_{Q_i} g(x)\, \mathrm{d}x$, so lässt sich die Konvergenz im Distributionssinn folgendermaßen einsehen:

$$\begin{aligned}
\Big|\Big\langle \zeta\,, \sum_i c_i \delta_{x_i} - [g] \Big\rangle\Big| &= \Big|\sum_i c_i \zeta(x_i) - \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x) g(x)\, \mathrm{d}x\Big| \\
&= \Big|\sum_i \int_{Q_i} (\zeta(x_i) - \zeta(x)) g(x)\, \mathrm{d}x\Big| \\
&\le \sup_{|y_1 - y_2|_\infty \le \varepsilon} |\zeta(y_1) - \zeta(y_2)| \cdot ||g||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,.
\end{aligned}$$

was im Limes für $\varepsilon \to 0$ gegen 0 geht. Im gleichen Sinne lässt sich die Konvergenz von $[\sum_{i=1}^{m} c_i F(\sqcup - x_i)]$ gegen $[F * f]$ einsehen. ☐

7.12 Satz. Sei $F = (F_{jk})_{jk} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{N \times M})$ eine Funktion, welche Fundamentallösung zu L wie in 7.8 ist, sowie $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^M)$ mit kompaktem Träger. Dann ist

$$u := F * g = \Big(\sum_{k=1}^{M} F_{jk} * g_k\Big)_{j=1,\dots,N} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$$

mit $L(u) = g$, d.h.

$$\sum_j L_{ij}[u_j] = [g_i] \qquad \text{für } i = 1, \dots, M.$$

Beweis. Es gilt für $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \boldsymbol{\zeta}\,,\, \sum_j \boldsymbol{L_{ij}[u_j]} \Big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} = \sum_j \Big\langle \boldsymbol{(L_{ij})^{\mathrm{T}}(\zeta)}\,,\, \boldsymbol{[u_j]} \Big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \big((L_{ij})^{\mathrm{T}}(\zeta)\big)(x)\, u_j(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j,k} \int_{\mathbb{R}^n} \big((L_{ij})^{\mathrm{T}}(\zeta)\big)(x) \int_{\mathbb{R}^n} F_{jk}(x-y) g_k(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j,k} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big((L_{ij})^{\mathrm{T}}(\zeta)\big)(x) F_{jk}(x-y)\,\mathrm{d}x \Big) g_k(y)\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Durch eine Verschiebung $x \rightsquigarrow x + y$ wird dies zu

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big((L_{ij})^{\mathrm{T}}(\zeta)\big)(x+y) F_{jk}(x)\,\mathrm{d}x \Big) g_k(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Big(\sum_j \int_{\mathbb{R}^n} (L_{ij})^{\mathrm{T}}(\zeta(\sqcup + y)) F_{jk}\,\mathrm{d}\mathrm{L}^n \Big)}_{= \sum_j \big\langle \boldsymbol{(L_{ij})^{\mathrm{T}}(\zeta(\sqcup + y))}\,,\, \boldsymbol{[F_{jk}]} \big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}} g_k(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \Big\langle \boldsymbol{\zeta(\sqcup + y)}\,,\, \sum_j \boldsymbol{L_{ij}[F_{jk}]} \Big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} g_k(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{i,k} \zeta(y) g_k(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{(nach Definition der Fundamentallösung)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(y) g_i(y)\,\mathrm{d}y = \langle \boldsymbol{\zeta}\,,\, \boldsymbol{[g_i]} \rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}\,,
\end{aligned}$$

das heißt $\sum_j L_{ij}[u_j] = [g_i]$. □

Wir wenden dies nun an auf ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (also ist $n = 1$, $m = 1$, $M = N$ in 7.6). Wenn wir die Variable in $\mathbb{R}$ nun mit t bezeichnen, sind sie für $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ von der Gestalt

$$L(u) := u' - Au = g$$

und wenn

$$\widetilde{u}(t) := \mathrm{e}^{-tA} u(t)$$

erfüllt diese Funktion die Gleichung

$$\widetilde{u}' = \big(\mathrm{e}^{-tA} u\big)' = \mathrm{e}^{-tA}(u' - Au) = \mathrm{e}^{-tA} g =: \widetilde{g}$$

so dass nach 7.9(2) mit einem Vektor u_0

$$\widetilde{u}(t) = u_0 + \int_{-\infty}^t \widetilde{g}(s)\,\mathrm{d}s = u_0 + \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-sA} g(s)\,\mathrm{d}s$$

also

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}\left(u_0 + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-sA} g(s)\,\mathrm{d}s\right) = \mathrm{e}^{tA}u_0 + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} g(s)\,\mathrm{d}s$$
$$= \mathrm{e}^{tA}u_0 + \int_{\mathbb{R}} F(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{tA}u_0 + (F*g)(t)\,,$$

wobei F definiert ist wie in der folgenden Aussage.

7.13 ODE-System. Sei $L(u) := u' - Au$ für $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine $N\times N$-Matrix ist. Dann ist durch

$$F(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{tA} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung $F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^{N\times N})$ von L definiert. Jede andere $\mathcal{L}^1_{loc}$-Fundamentallösung hat die Gestalt

$$t \longmapsto F(t) + \mathrm{e}^{tA}\,C_0$$

mit einer konstanten Matrix $C_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

Beweis der Fundamentallösung. Es ist zunächst für $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$

$$L^{\mathrm{T}}\eta = -\eta' - A^{\mathrm{T}}\eta\,.$$

Dann folgt für $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^{N\times N})$

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{L}[\boldsymbol{F}]\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} = \big\langle \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}\,, [\boldsymbol{F}]\big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} \\
&= \int_0^\infty (L^{\mathrm{T}}\zeta)(t)\bullet \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \Big(\zeta'(t) + A^{\mathrm{T}}\zeta(t)\Big)\bullet \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\infty \underbrace{\Big(\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\zeta'(t) + \mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}A^{\mathrm{T}}\zeta(t)\Big)}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\zeta(t))} \bullet \mathrm{Id}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\infty \operatorname{trace}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\zeta(t))\Big)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\operatorname{trace}(\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\zeta(t))\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \operatorname{trace}(\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\zeta(t))\Big|_{t=0} = \operatorname{trace}\zeta(0) = \langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{\delta}_0\mathbf{Id}\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R})}\,,
\end{aligned}$$

was $L[F] = \boldsymbol{\delta}_0\mathrm{Id}$ bedeutet. ☐

Beweis der Eindeutigkeit. Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, $\widetilde{F}$ sei eine weitere Fundamentallösung. Definiere $H := \widetilde{F} - F$, dann ist $L[H] = 0$. Also gilt für $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^{N\times N})$, da $(L^{\mathrm{T}}\zeta)(t) = -(\zeta'(t) + A^{\mathrm{T}}\zeta(t))$,

$$\begin{aligned}
&0 = \langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{L}[\boldsymbol{H}]\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} = \big\langle \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}\,, [\boldsymbol{H}]\big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} \\
&= \int_0^\infty (L^{\mathrm{T}}\zeta)(t)\bullet H(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \Big(\zeta'(t) + A^{\mathrm{T}}\zeta(t)\Big)\bullet H(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\infty \underbrace{\Big(\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\zeta'(t) + \mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}A^{\mathrm{T}}\zeta(t)\Big)}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\zeta(t))} \bullet \Big(\mathrm{e}^{-tA}H(t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Definieren wir nun
$$\widetilde{H}(t) := \mathrm{e}^{-tA}H(t)$$
und für $\widetilde{\zeta} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^{N\times N})$
$$\zeta(t) := \mathrm{e}^{-tA^{\mathrm{T}}}\widetilde{\zeta}(t)\,, \ \text{also}\ \mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\zeta(t) = \widetilde{\zeta}(t)\,,$$
so haben wir gezeigt, dass für alle $\widetilde{\zeta}$
$$0 = -\int_0^\infty \widetilde{\zeta}'(t)\bullet\widetilde{H}(t)\,\mathrm{d}t = -\Big\langle \boldsymbol{\widetilde{\zeta}'}\,,[\boldsymbol{\widetilde{H}}]\Big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} = \Big\langle \boldsymbol{\widetilde{\zeta}}\,,[\boldsymbol{\widetilde{H}}]'\Big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R})}\,,$$
also $[\widetilde{H}]' = 0$. Es folgt, dass es eine $(N\times N)$-Matrix C_0 gibt mit $\widetilde{H}(t) = C_0$, was zu zeigen war. □

Als letztes Beispiel in diesem Abschnitt betrachten wir die Ableitung $u \mapsto \partial_i u$. Deren Fundamentallösung ist eine Distribution, und zwar ein Linienintegral.

7.14 Die Ableitung $\boldsymbol{\partial_i}$. Betrachte die eindimensionale Halbgerade
$$\Gamma_i := \{s\mathbf{e}_i\,;\ s \geq 0\}.$$
Dann ist die Distribution
$$F = \mathrm{H}^1 \llcorner \Gamma_i$$
eine Fundamentallösung des Operators $L(u) := \partial_i u$.

Beweis. Die Distribution ist für $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$
$$\langle \boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{F}\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\Gamma_i} \zeta\,\mathrm{d}\mathrm{H}^1 = \int_0^\infty \zeta(s\mathbf{e}_i)\,\mathrm{d}s\,.$$
Dann ist
$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{LF}\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} = \big\langle \boldsymbol{L}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{F}\big\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} = \langle -\boldsymbol{\partial_i\zeta}\,,\boldsymbol{F}\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}\\ &= -\int_0^\infty (\partial_i\zeta)(s\mathbf{e}_i)\,\mathrm{d}s = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(\zeta(s\mathbf{e}_i)\big)\,\mathrm{d}s = \zeta(0) = \langle \boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{\delta_0}\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}\,,\end{aligned}$$
also $LF = \boldsymbol{\delta}_0$. □

In this section we have mainly seen fundamental solutions for ODE's. Besides these we present further examples and among them the classical fundamental solutions in section 8 and 9.

8 Ortsabhängige Fundamentallösungen

In diesem Abschnitt sind die Koordinaten wie vorher gegeben durch

$$x \in \mathbb{R}^n ,$$

also ist der vorige Abschnitt 7 auf den $\mathbb{R}^n$ anzuwenden. Wir betrachten in diesem Abschnitt die Fundamentallösungen der

- Divergenzgleichung (siehe 8.2),
- Laplacegleichung (siehe 8.3),
- Cauchy-Riemann Gleichung (siehe 8.9).

Das erste Beispiel behandelt den Divergenzoperator.

8.1 Divergenzoperator. Der ***Divergenzoperator*** ist definiert als Abbildung $L : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, es ist $N = n$ und $M = 1$ in 7.1, durch

$$L(u) := \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i u_i \, .$$

Eine Fundamentallösung des Divergenzoperators ist gegeben durch

8.2 Fundamentallösung des Divergenzoperator. Sei $L(u) = \operatorname{div}(u)$ für $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Dann definiert

$$F(x) := \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n}$$

eine Fundamentallösung $F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ zu L. *Definition:* $\sigma_n := \mathrm{H}^{n-1}(\partial \mathrm{B}_1(0))$.
Hinweis: Dies ist wirklich nur <u>eine</u> Fundamentallösung des angegebenen Operators. Es existieren sehr verschiedene Fundamentallösungen, eine Eindeutigkeitsaussage wie etwa in 7.13 ist nicht möglich.

Beweis. Es ist $N = n$. Da $M = 1$ werden in der Definition des Operators Matrizen in $\mathbb{R}^{1\times n}$ mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert und in der Definition der Fundamentallösung $\mathbb{R}^{n\times 1}$ mit $\mathbb{R}^n$. Also ist $L = (L_j)_{j=1,\dots,n} = (\partial_j)_{j=1,\dots,n}$ und $F = (F_j)_{j=1,\dots,n}$. Dass F Fundamentallösung ist, heißt also

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j [F_j] = \boldsymbol{\delta}_0 \, ,$$

was also zu zeigen ist. Nun ist für $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_j \langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{\partial_j [F_j]} \,\rangle = \sum_j \langle\, \boldsymbol{-\partial_j \zeta} \,, \boldsymbol{[F_j]} \,\rangle$$
$$= -\sum_j \int_{\mathbb{R}^n} F_j \, \partial_j \zeta \, \mathrm{dL}^n = -\int_{\mathbb{R}^n} F \bullet \nabla \zeta \, \mathrm{dL}^n \, .$$

Wir betrachten das Gebiet mit ausgestochener Kugel

$$-\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(0)} F \bullet \nabla \zeta \, \mathrm{dL}^n \to -\int_{\mathbb{R}^n} F \bullet \nabla \zeta \, \mathrm{dL}^n \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

und benutzen den Satz von Gauß, wobei klar ist, dass im klassischen Sinne $\operatorname{div} F = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Partielle Integration ergibt dann

$$\begin{aligned}
&- \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(0)} F \bullet \nabla \zeta \, \mathrm{dL}^n = \int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \zeta \, F \bullet \nu_{\mathrm{B}_\varepsilon(0)} \, \mathrm{dH}^{n-1} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \zeta \operatorname{div} F \, \mathrm{dL}^n \\
&= \int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \zeta(x) \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n} \bullet \frac{x}{|x|} \, \mathrm{dH}^{n-1}(x) = \int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \zeta(x) \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \, \mathrm{dH}^{n-1}(x) \\
&= \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \zeta(x) \, \mathrm{dH}^{n-1}(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial \mathrm{B}_1(0)} \zeta(\varepsilon y) \, \mathrm{dH}^{n-1}(y) \\
&\to \zeta(0) \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \,,
\end{aligned}$$

da $\zeta(\varepsilon y)$ in der Variablen $y \in \partial \mathrm{B}_1(0)$ gleichmäßig gegen $\zeta(0)$ konvergiert. $\square$

Wir geben nun die Fundamentallösung für den negativen Laplace-Operator an, der gegeben ist durch $\quad L(u) := -\Delta u = \operatorname{div}(-\nabla u)$.

8.3 Fundamentallösung zu $-\boldsymbol{\Delta}$. Die Funktion

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3 \\ -\dfrac{1}{2\pi} \log |x| & \text{für } n = 2 \\ -\dfrac{1}{2} |x| & \text{für } n = 1 \end{cases}$$

definiert eine ***Fundamentallösung*** $F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ von $-\Delta$. *Definition:* Dabei ist σ_n der Flächeninhalt der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} := \partial \mathrm{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei speziell $\sigma_1 = 2$ und $\sigma_2 = 2\pi$. Allgemein gilt $\sigma_n = n\kappa_n$, wobei κ_n das Volumen der Einheitskugel $\mathrm{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Es sei für $r > 0$

$$\psi(r) := \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n} r^{2-n} & \text{für } n \geq 3 \\ -\dfrac{1}{2\pi} \log r & \text{für } n = 2 \\ -\dfrac{r}{2} & \text{für } n = 1 \end{cases}$$

dann ist

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_n} \psi_n(|x|) \text{ und } \psi_n'(r) = -\frac{1}{r^{n-1}} \,.$$

Also gilt für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\partial_i F(x) = \frac{1}{\sigma_n} \psi_n'(|x|) \frac{x_i}{|x|} = -\frac{1}{\sigma_n} \frac{x_i}{|x|^n} =: -G_i(x).$$

Nun ist

$$G(x) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n} \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

die Fundamentallösung in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ vom div-Operator, also nach 8.2

$$\sum_i \partial_i [G_i] = \boldsymbol{\delta}_0 \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Zu zeigen bleibt also noch

$$\partial_i[F] = -[G_i] \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \tag{8.1}$$

denn dann folgt

$$-\Delta[F] = \sum_i \partial_i(-\partial_i[F]) = \sum_i \partial_i[G_i] = \boldsymbol{\delta}_0 \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),$$

was zu zeigen war. Die Behauptung (8.1) kann mit eine der folgenden Beweisansätzen verifiziert werden:

- Durch Herausstechen einer ε-Kugel um 0 wie im Beweis von 8.2.
- Zeige, dass $F \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ liegt, also $\partial_i[F] = [\partial_i F]$.

□

Es gilt die folgende Eindeutigkeitsaussage.

8.4 Eindeutigkeit der Fundamentallösung von $-\boldsymbol{\Delta}$. Ist $n \geq 3$, so ist die Fundamentallösung in 8.3 die einzige Fundamentallösung $F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ von $-\Delta$, die

$$F(x) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty$$

erfüllt, d.h. die im Unendlichen verschwindet.

Beweis. .... □

Mit Satz 7.12 folgt:

8.5 Integraldarstellung des Laplaceoperators. Ist $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, so definiert

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} F(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y & \text{für } n \geq 3 \\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \log\frac{1}{|x-y|}\cdot f(y)\,\mathrm{d}y & \text{für } n = 2 \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x-y| f(y)\,\mathrm{d}y & \text{für } n = 1 \end{cases}$$

eine $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$-Funktion mit

$$-\Delta[u] = [f] \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Before we study differential equations for complex functions let us make some essential comments.

8.6 Remark on complex numbers. Wir machen die Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(1) Die komplexe Multiplikation $z \to wz$ hat die Matrixdarstellung

$$wz = \mathbf{C}_w z\,, \quad \mathbf{C}_w := \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix}$$

mit $w = w_1 + \mathrm{i}w_2 \in \mathbb{C}$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

(2) Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt $w \bullet z = \mathrm{Re}\,(w\overline{z})$.

(3) Die ***Wirtinger-Ableitungen*** sind für komplexwertige Funktionen u

$$\partial_{\overline{z}} u := \frac{1}{2}(\partial_1 u + \mathrm{i}\partial_2 u)\,, \quad \partial_z u := \frac{1}{2}(\partial_1 u - \mathrm{i}\partial_2 u)$$

Es gilt $\overline{\partial_{\overline{z}} u} = \partial_z \overline{u}$ und $\overline{\partial_z u} = \partial_{\overline{z}} \overline{u}$.

(4) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\partial_{\overline{z}}(z^k) = 0$ und $\partial_z(z^k) = kz^{k-1}$.

Beweis (1). Es gilt

$$\mathbf{C}_w z = \mathbf{C}_w \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 z_1 - w_2 z_2 \\ w_2 z_1 + w_1 z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,(wz) \\ \mathrm{Im}\,(wz) \end{bmatrix} = wz\,.$$

□

Beweis (2). .... □

Beweis (3). .... □

Beweis (4). Es ist mit $z = (z_1, z_2)$

$$\begin{aligned} \partial_1\left((z_1 + \mathrm{i}z_2)^k\right) &= k(z_1 + \mathrm{i}z_2)^{k-1}\,, \\ \partial_2\left((z_1 + \mathrm{i}z_2)^k\right) &= k(z_1 + \mathrm{i}z_2)^{k-1} \cdot \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

8.7 Cauchy-Riemann-Operator. Der ***Cauchy-Riemann-Operator*** ist definiert als Abbildung $L : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ durch

$$\begin{aligned} L(u) &:= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial_1 u_1 - \partial_2 u_2 \\ \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 \end{bmatrix} = \partial_{\overline{z}} u \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \partial_1 u + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_2 u = \frac{1}{2}\partial_1 u + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_2 u \end{aligned}$$

Also ist $m = 1$, $n = M = N = 2$ in 7.1. In komplexer Schreibweise der Operator mit seinem adjungierten Operator ist

$$\begin{aligned} L(u) &= \partial_{\overline{z}} u = \frac{1}{2}(\partial_1 u + \mathrm{i}\partial_2 u)\,, \\ L^{\mathrm{T}}(v) &= -\partial_z v = -\frac{1}{2}(\partial_1 v - \mathrm{i}\partial_2 v)\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Darstellung mit Matrizen zeigt, dass der Operator von der Gestalt 7.1 ist.

Beweis der Darstellungen. Es ist

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\mathrm{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

Also

$$\begin{aligned} L(u) &:= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial_1 u_1 - \partial_2 u_2 \\ \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \partial_1 u + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_2 u \\ &= \frac{1}{2}(\partial_1 u + \mathrm{i}\partial_2 u) = \partial_{\overline{z}} u. \end{aligned}$$

□

Beweis des transponierten Operators. Es ist für $\zeta \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} &\zeta \bullet L(u) = \mathrm{Re}\left(\zeta\, \overline{L(u)}\right) = \mathrm{Re}\left(\zeta\, \overline{\partial_{\overline{z}} u}\right) = \mathrm{Re}\left(\zeta\, \partial_z \overline{u}\right) \\ &= \mathrm{Re}\, \partial_z(\zeta\, \overline{u}) - \mathrm{Re}\left(\partial_z \zeta\, \overline{u}\right). \end{aligned}$$

Da

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Re}\, \partial_z(\zeta\, \overline{u})\, \mathrm{dL}^2 = \mathrm{Re}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \partial_z(\zeta\, \overline{u})\, \mathrm{dL}^2\Big) = 0\,,$$

folgt

$$\begin{aligned} &\langle\, \boldsymbol{\zeta} \,,\, \boldsymbol{L(u)} \,\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \zeta \bullet L(u)\, \mathrm{dL}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\mathrm{Re}\, \partial_z(\zeta\, \overline{u}) - \mathrm{Re}\left(\partial_z \zeta\, \overline{u}\right)\Big)\, \mathrm{dL}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Re}\left(-\partial_z \zeta\, \overline{u}\right) \mathrm{dL}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (-\partial_z \zeta) \bullet u\, \mathrm{dL}^2 = \langle\, \boldsymbol{-\partial_z \zeta} \,,\, \boldsymbol{u} \,\rangle, \end{aligned}$$

das heißt $\langle\, \boldsymbol{\zeta} \,,\, \boldsymbol{L(u)} \,\rangle = \big\langle\, \boldsymbol{L^{\mathrm{T}} \zeta} \,,\, \boldsymbol{u} \,\big\rangle$, wobei $L^{\mathrm{T}} = -\partial_z$. □

Before we present the fundamental solution for this operator, this general remark on fundamental solutions:

8.8 Representation of fundamental solutions. Let $F = (F_{jk})_{j=1,\dots,N;k=1,\dots,M}$ be a distributional fundamental solution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{N\times M})$ as in 7.6 of the operator $L : \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^M)$. This is equivalent to, for $k = 1, \dots, M$,

$$\sum_{j=1}^{N} \big\langle\, \boldsymbol{(L^{\mathrm{T}}\zeta)_j} \,,\, \boldsymbol{F_{jk}} \,\big\rangle = \zeta_k(0) \quad \text{for } \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^M)\,. \tag{8.3}$$

If F is a $\mathcal{L}^1_{loc}$-fundamental solution in $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{N\times M})$ then this is equivalent to

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} \zeta\, \mathrm{dL}^n = \zeta(0) \quad \text{for } \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^M)\,. \tag{8.4}$$

Beweis of (8.3). Es wurde in Abschnitt 7 in (7.9) gezeigt, dass die Eigenschaft von F Fundamentallösung zu sein äquivalent ist zu

$$\sum_{i,j} \langle\, \boldsymbol{\zeta_i} \,,\, \boldsymbol{L_{ij} F_{jk}} \,\rangle = \zeta_k(0)\,.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\sum_i \langle\, \boldsymbol{\zeta_i} \,,\, \boldsymbol{L_{ij} F_{jk}} \,\rangle = \sum_i \Big\langle\, \boldsymbol{(L_{ij})^{\mathrm{T}} \zeta_i} \,,\, \boldsymbol{F_{jk}} \,\Big\rangle = \sum_i \big\langle\, \boldsymbol{L^{\mathrm{T}}{}_{ji} \zeta_i} \,,\, \boldsymbol{F_{jk}} \,\big\rangle \\ &= \Big\langle\, \boldsymbol{\sum_i L^{\mathrm{T}}{}_{ji} \zeta_i} \,,\, \boldsymbol{F_{jk}} \,\Big\rangle = \big\langle\, \boldsymbol{(L^{\mathrm{T}}\zeta)_j} \,,\, \boldsymbol{F_{jk}} \,\big\rangle \end{aligned}$$

woraus (8.3) folgt. □

Beweis of (8.4). Ist F eine lokal integrierbare Fundamentallösung, so besagt (8.3)

$$\begin{aligned}\zeta_k(0) &= \sum_j \left\langle \boldsymbol{(L^{\mathrm{T}}\zeta)_j \, , [F_{jk}]} \right\rangle = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} (L^{\mathrm{T}}\zeta)_j F_{jk} \, \mathrm{dL}^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j {F^{\mathrm{T}}}_{kj} (L^{\mathrm{T}}\zeta)_j \, \mathrm{dL}^n = \int_{\mathbb{R}^n} (F^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} \zeta)_k \, \mathrm{dL}^n ,\end{aligned}$$

was (8.4) impliziert. □

Wir kommen nun zur Fundamentallösung des Cauchy-Riemann Operators.

8.9 Fundamentallösung des Cauchy-Riemann Operators. Sei L wie in 8.7. In der komplexen Notation definiert

$$F(z) := \frac{1}{\pi z} \tag{8.5}$$

eine Fundamentallösung $F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ zum Cauchy-Riemann-Operator, d.h. zum $\partial_{\overline{z}}$-Operator. In reeller Notation ist diese Fundamentallösung

$$F(z) := \frac{1}{\pi |z|^2} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi |z|^2} \mathbf{C}_{\overline{z}} \, ,$$

jetzt definiert als Funktion $F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times 2})$. *Bemerkung:* Dass die Funktion Fundamentallösung ist, bedeutet in komplexer Schreibweise

$$- \int_{\mathbb{R}^2} \overline{F} \partial_z \zeta \, \mathrm{dL}^2 = \zeta(0) \quad \text{für alle } \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C};\mathbb{C}) \, . \tag{8.6}$$

Beweis. Nach 8.8 ist zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} F^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} \zeta \, \mathrm{dL}^2 = \zeta(0)$$

ist für alle

$$\zeta = \zeta_1 + \mathrm{i}\zeta_2 = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \, .$$

Nun ist $L^{\mathrm{T}}\zeta = -\partial_z \zeta$ nach 8.7 und

$$F^{\mathrm{T}}(z) = \frac{1}{\pi |z|^2} \mathbf{C}_z$$

die komplexe Multiplikation mit

$$\frac{1}{\pi |z|^2} z = \frac{1}{\pi \overline{z}} = \overline{F(z)} \, ,$$

woraus also folgt, dass die Behauptung (8.6) in der Bemerkung zu zeigen ist.

Nun gilt für $\varepsilon \searrow 0$

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^2} \overline{F}\partial_z\zeta \,\mathrm{dL}^2 &\leftarrow -\int_{\mathbb{R}^2\setminus \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \overline{F}\partial_z\zeta \,\mathrm{dL}^2 \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2\setminus \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \partial_z(\overline{F}\zeta)\,\mathrm{dL}^2 \quad (\text{wegen } \partial_z\overline{F} = 0 \text{ in } \mathbb{C}\setminus\{0\}) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \overline{F}\zeta(\nu_1 - \mathrm{i}\nu_2)\,\mathrm{dH}^1 \quad (\text{es ist } \overline{F}(z) = \frac{1}{\pi\overline{z}}) \\
&= -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial \mathrm{B}_1(0)} \zeta\,\mathrm{dH}^1 \to \zeta(0),
\end{aligned}$$

also ist F eine Fundamentallösung. □

Mit Satz 7.12 folgt:

8.10 Integraldarstellung des Cauchy-Riemann-Operators. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{C};\mathbb{C})$ mit kompaktem Träger. Dann definiert

$$u(z) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y)}{\pi(z-y)}\,\mathrm{dL}^2(y)$$

eine Lösung $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ der Differentialgleichung

$$\partial_{\overline{z}}[u] = [f] \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{C}).$$

Dies ist äquivalent zu

$$-\int_{\mathbb{R}^2} u\,\partial_{\overline{z}}\zeta\,\mathrm{dL}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f\zeta\,\mathrm{dL}^2 \quad \text{für } \zeta \in C_0^\infty(\mathbb{C};\mathbb{C}).$$

9 Zeitabhängige Fundamentallösungen

In diesem Abschnitt sind die Koordinaten gegeben durch

$$(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1+n} = \mathbb{R}^{\underline{n}} \text{ mit } \underline{n} = n+1\,,$$

d.h. der Abschnitt 7 ist auf den $\mathbb{R}^{\underline{n}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ anzuwenden. Wir geben in diesem Abschnitt die Fundamentallösungen der

- Wärmeleitungsgleichung,
- Schrödingergleichung,
- Wellengleichung in verschiedenen Dimensionen

an. Die Fundamentallösung der Wellengleichung hat für verschiedene Raumdimensionen unterschiedliche Regularität. So ist sie für $n = 2$ eine L^4-integrierbare Funktion, aber für $n = 3$ nur bezüglich H^3 integrierbar auf dem Rand des Zeitkegels, also einer Hyperfläche in Raumzeit.

Wir starten mit dem Wärmeleitungsoperator.

9.1 Wärmeleitungsoperator. Sei $a > 0$. Der ***Wärmeleitungsoperator*** ist definiert als Abbildung $L : \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ durch

$$L(u) := \partial_t u - \Delta u\,.$$

Also ist n beliebig und $M = N = 1$ in 7.1. Der dazu transponierte Operator ist

$$L^{\mathrm{T}}(v) = -\partial_t v - \Delta v.$$

Beweis. It is $L^{\mathrm{T}}(v) = (-1)^1 \partial_t v - \sum_{i=1}^n (-1)^2 \partial_i^2 v = -\partial_t v - \Delta v$. □

Wir geben die Fundamentallösung an.

9.2 Fundamentallösung des Wärmeleitungsoperators. Durch

$$F(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine Fundamentallösung $F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ von L definiert. *Bemerkung:* F ist reell-analytisch in $]0,\infty[\times \mathbb{R}^n$ und ∞-oft differenzierbar in $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$. Weiter hat F die Darstellung

$$F(t,x) = \psi_{\sqrt{t}}(x) \text{ für } t > 0$$

mit

$$\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \psi(x) := \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4}}\,.$$

Es ist $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ eine Dirac-Folge, d.h. ψ hat Integral 1.

Beweis. Sei $t > 0$. Wir berechnen die partiellen Ableitungen von F:

$$\partial_{x_i} F(t,x) = -\frac{x_i}{2t} F(t,x)\,,$$
$$\partial_{x_j}\partial_{x_i} F(t,x) = \left(-\frac{\delta_{i,j}}{2t} + \frac{x_i x_j}{4t^2}\right) F(t,x)\,,$$

also ist

$$\Delta F(t,x) = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) F(t,x) = \partial_t F(t,x)\,,$$

d.h. $L(F) = 0$ auf $]0,\infty[\times\mathbb{R}^n$. Also bleibt zu zeigen, dass

$$L[F] = \boldsymbol{\delta}_{(0,0)} \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\,.$$

Sei $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\langle \zeta\,, L[F] \rangle} = \boldsymbol{\langle L^{\mathrm{T}}\zeta\,, [F] \rangle} \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} (-\partial_t\zeta - \Delta\zeta) F \,\mathrm{dL}^{n+1} \\
&\leftarrow \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (-\partial_t\zeta - \Delta\zeta) F \,\mathrm{dL}^n\,\mathrm{dL}^1 \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\zeta F)(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \zeta \underbrace{(\partial_t F - \Delta F)}_{=0} \,\mathrm{dL}^n\,\mathrm{dL}^1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(\varepsilon,x)\psi_{\sqrt{\varepsilon}}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(0,x)\psi_{\sqrt{\varepsilon}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\zeta(\varepsilon,x) - \zeta(0,x))}_{\to 0 \text{ glm. in } x} \psi_{\sqrt{\varepsilon}}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\to \zeta(0,0) = \boldsymbol{\langle \zeta\,, \delta_{(0,0)} \rangle} \quad \text{für } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Eigenschaftern einer Dirac-Folge, d.h. für $\varepsilon \to 0$

$$\psi_{\sqrt{\varepsilon}} * \zeta(0, -\sqcup) \to \zeta(0,0)\,,$$
$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\zeta(\varepsilon,x) - \zeta(0,x))\psi_{\sqrt{\varepsilon}}(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\zeta(\varepsilon,x) - \zeta(0,x)| \to 0\,.$$

$\square$

The second example is the

9.3 Schrödinger-Operator. Der ***Schrödinger-Operator*** mit konstanten Koeffizienten ist definiert als Abbildung $L\colon\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)\to\mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ durch

$$L(u) := \frac{h}{\mathrm{i}}\partial_t u - \frac{h^2}{m}\Delta u\,.$$

If we write $u = (u_1, u_2) = u_1 + \mathrm{i}u_2$ this definition is equivalent to

$$L(u) = \begin{bmatrix} h\partial_t u_2 - \dfrac{h^2}{m}\Delta u_1 \\ -h\partial_t u_1 - \dfrac{h^2}{m}\Delta u_2 \end{bmatrix} = h\partial_t \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix} - \frac{h^2}{m}\Delta \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

and it is $n = M = N = 2$ in 7.1. *Konstanten:* The constants are m, the mass of the particle, and h, the Planck constant.

References: The Schrödinger equation you find in [**?**, –] and in [15, Sect. 1.5], where it is said: “It has the effect of not being Lorentz-invariant and therefore of not fitting in the relativistic formulation of quantum mechanics. It is still used as an approximation, but in a more rigorous setup, it has been replaced by Dirac’s equations.” See [15, Example 15.1].

It’s fundamental solution is given by

9.4 Fundamental solution of Schrödinger’s operator. ...... in Bearbeitung .....

Beweis außerhalb $(0,0)$. □

Beweis in Umgebung von $(0,0)$. □

9.5 Wellenoperator. ...... in Bearbeitung .....

9.6 Fundamentallösung des Wellenoperators. ...... in Bearbeitung .....

In Bearbeitung

10 Gradientenoperator

The following is true:

10.1 Theorem. If $U \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};\mathbb{R})$ with

$$\partial_i U = F_i \text{ in } \mathscr{D}'(\mathcal{U};\mathbb{R}) \text{ for } i = 1,\dots,n\,, \tag{10.1}$$

where $F_i \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};\mathbb{R})$, then

$$\partial_j F_i = \partial_i F_j \text{ in } \mathscr{D}'(\mathcal{U};\mathbb{R}) \text{ for } i,j = 1,\dots,n\,. \tag{10.2}$$

Beweis. $\partial_j F_i = \partial_j \partial_i U = \partial_i \partial_j U = \partial_i F_j$, which is based on the basic fact, that the differential operators ∂_i and ∂_j commute on distributions, because they commute on test functions. □

Therefore, if $L_i = \partial_i$, that is

$$L = \nabla : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$$

is the ***gradient operator***, this operator has no fundamental solution. Because, if it would have one, by Theorem 7.12 it would have a solution $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ of the equation (10.1) for any right side, therefore also for one which not satisfies (10.2). This is a contradiction.

11 Cauchy-Hauptwert

Der Begriff der Distribution ist besonders dazu geeignet Limiten zu betrachten. Zu diesen Limiten gehört der Cauchy'sche Hauptwert.

Es gilt folgende allgemeine Aussage über Distributionen, die punktweise einen Limes haben, und auch "Folgenvollständigkeit des Raumes $\mathscr{D}'$" genannt wird, siehe Walter [16, §4 II], Jäger [9, 2.2 Satz], Gelfand & Schilow [6, Kapitel I §5 6].

11.1 Theorem. Es sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$. If for all $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U};Y)$ the limit

$$\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{T} \rangle := \lim_{m\to\infty} \langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{T_m} \rangle \tag{11.1}$$

exists, then $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$. Moreover, for $U \subset\subset \mathcal{U}$ there exist $C_U \geq 0$ and $k_U \in \mathbb{N}_0$ such that for all $m \in \mathbb{N}$

$$|\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{T_m} \rangle| \leq C_U \|\zeta\|_{\mathcal{C}^{k_U}(\overline{U};Y)} \text{ for all } \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(U;Y)\,.$$

Zur Formulierung des Satzes ist zu sagen, dass die Voraussetzung nur besagt

$$\lim_{m\to\infty} \langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{T_m} \rangle$$

existiere für jedes ζ. Bezeichne diesen Limes mit l_ζ. Dann ist $\zeta \mapsto l_\zeta$ linear und sogar ein Element von $\mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$. Bezeichne dieses als T. Die letzte Aussage des Satzes gilt für alle Folgen $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (die einen Limes haben), also hängen insbesondere C_U und k_U von dieser Folge ab. Überhaupt ist die Aussage mit dem Satz von Banach-Steinhaus (siehe [1, 5.3.] bzw. [2, 7.3.]) verwandt.

Beweis dass $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$ [16, §4 II]. We have to show that

$$\begin{aligned}&\forall\, U \subset\subset \mathcal{U} :\ \exists\, C \geq 0 :\ \exists\, k \in \mathbb{N}_0 : \\ &\forall\, \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(U) :\ |\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{T} \rangle| \leq C\|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U};Y)}\,.\end{aligned} \tag{11.2}$$

Assume this is not true, that is,

$$\begin{aligned}&\exists\, U \subset\subset \mathcal{U} :\ \forall\, C \geq 0 :\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0 : \\ &\exists\, \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(U) :\ |\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{T} \rangle| > C\|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U};Y)}\,.\end{aligned} \tag{11.3}$$

Choose a sequence $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $C_k \to \infty$ as $k \to \infty$. Then (11.3) implies

$$\begin{aligned}&\exists\, U \subset\subset \mathcal{U} :\ \forall\, k \in \mathbb{N} : \\ &\exists\, \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(U) :\ |\langle \boldsymbol{\zeta}\,, \boldsymbol{T} \rangle| > C_k\|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U};Y)}\,.\end{aligned} \tag{11.4}$$

Now let $U \subset\subset \mathcal{U}$ according to (11.4) and for $k \in \mathbb{N}$ let $\zeta_k \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ as in (11.4), that is,

$$|\langle \boldsymbol{\zeta_k}\,, \boldsymbol{T} \rangle| > C_k\|\zeta_k\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U})}\,.$$

For definiteness let $C_k = 2^{2k}$. Then the modified functions (it is $\zeta_k \neq 0$)

$$\widetilde{\psi}_k := \frac{\zeta_k}{2^k\|\zeta_k\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U})}}$$

satisfy, by the linearity of T (which follows trivially), $\left|\left\langle \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{k}}\,, \boldsymbol{T}\right\rangle\right| > 2^k$. If we multiply $\widetilde{\psi}_k$ by a certain number σ_k with $|\sigma_k| = 1$ we obtain $\psi_k := \sigma_k\widetilde{\psi}_k$ satisfying

$$\mathrm{Re}\,\langle\,\boldsymbol{\psi_k}\,,\boldsymbol{T}\,\rangle > 2^k\,, \tag{11.5}$$

we take for example $\sigma_k = |\left\langle \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{k}}\,, \boldsymbol{T}\right\rangle|^{-1}\overline{\left\langle \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{k}}\,, \boldsymbol{T}\right\rangle}$. Obviously it is for all k

$$\mathrm{supp}\,\psi_k \subset U \quad \text{ and } \quad \|\psi_k\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U})} \leq 2^{-k}\,, \tag{11.6}$$

therefore $\|\psi_k\|_{\mathcal{C}^l(\overline{U})} \to 0$ as $k\to\infty$ for all $l\in\mathbb{N}$. Since $T_m \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$, there exist $C(T_m,U)$ and $k(T_m,U)$ with

$$|\,\langle\,\boldsymbol{\zeta}\,,\boldsymbol{T_m}\,\rangle\,| \leq C(T_m,U)\|\zeta\|_{\mathcal{C}^{k(T_m,U)}(\overline{U})} \text{ for all } \zeta\in\mathscr{D}(U;Y)\,.$$

We conclude that $|\,\langle\,\boldsymbol{\psi_k}\,,\boldsymbol{T_m}\,\rangle\,| \leq C(T_m,U)\|\psi_k\|_{\mathcal{C}^{k(T_m,U)}(\overline{U})} \to 0$ as $k\to\infty$. Hence for each m

$$\lim_{k\to\infty}|\,\langle\,\boldsymbol{\psi_k}\,,\boldsymbol{T_m}\,\rangle\,| = 0\,. \tag{11.7}$$

On the other hand, for fixed k, it follows $\langle\,\boldsymbol{\psi_k}\,,\boldsymbol{T_m}\,\rangle \to \langle\,\boldsymbol{\psi_k}\,,\boldsymbol{T}\,\rangle$ as $m\to\infty$, that is, by (11.5) for each k

$$\lim_{m\to\infty}\mathrm{Re}\,\langle\,\boldsymbol{\psi_k}\,,\boldsymbol{T_m}\,\rangle > 2^k\,. \tag{11.8}$$

We now use (11.7) and (11.8) to construct subsequences $(R_i,\varphi_j) = (T_{m_i},\psi_{k_j})$ for $i,j\in\mathbb{N}$, so that

$$\begin{aligned}|\,\langle\,\boldsymbol{\varphi_j}\,,\boldsymbol{R_i}\,\rangle\,| &< 2^{-j} \text{ for } i<j,\\ \mathrm{Re}\,\langle\,\boldsymbol{\varphi_j}\,,\boldsymbol{R_i}\,\rangle &\geq 2^j \text{ for } i\geq j.\end{aligned} \tag{11.9}$$

This subsequences are constructed inductively in $l\in\mathbb{N}$, where for given l the inequalities are considered as

$$\begin{aligned}|\,\langle\,\boldsymbol{\varphi_j}\,,\boldsymbol{R_i}\,\rangle\,| &< 2^{-j} \text{ for } 1\leq i<j\leq l,\\ \mathrm{Re}\,\langle\,\boldsymbol{\varphi_j}\,,\boldsymbol{R_i}\,\rangle &\geq 2^j \text{ for } 1\leq j\leq i\leq l.\end{aligned} \tag{11.10}$$

The base of induction is $l=1$. Then the only relevant term is

$$\mathrm{Re}\,\langle\,\boldsymbol{\varphi_j}\,,\boldsymbol{R_i}\,\rangle \geq 2^j \text{ for } 1=j=i=l=1\,.$$

We set $\varphi_1 := \psi_1$. By (11.8) we have that the limit of $\mathrm{Re}\,\langle\,\boldsymbol{\psi_1}\,,\boldsymbol{T_m}\,\rangle$ as $m\to\infty$ is bigger than 2. Hence for some $m_1\in\mathbb{N}$ we have

$$\mathrm{Re}\,\langle\,\boldsymbol{\psi_1}\,,\boldsymbol{T_m}\,\rangle \geq 2 \text{ for } m\geq m_1.$$

Set $R_1 := T_{m_1}$ which implies $\mathrm{Re}\,\langle\,\boldsymbol{\varphi_1}\,,\boldsymbol{R_1}\,\rangle \geq 2$.

We have to do the induction step from $l-1\geq 1$ to l. First we fulfil

$$|\,\langle\,\boldsymbol{\varphi_j}\,,\boldsymbol{R_i}\,\rangle\,| < 2^{-j} \text{ for } 1\leq i<j\leq l\,. \tag{11.11}$$

For $1\leq i<j<l$ (that is $1\leq i<j\leq l-1$) the inequality has been shown before. Therefore let $1\leq i<j=l$. Since $i<l$ (that is $i\leq l-1$) the R_i are already chosen as $R_i = T_{m_i}$. Thus it remains to show

$$|\,\langle\,\boldsymbol{\varphi_l}\,,\boldsymbol{T_{m_i}}\,\rangle\,| < 2^{-l} \text{ for } 1\leq i<l\,,$$

where we want to set $\varphi_l = \psi_{k_l}$. Now $1 \le i < l$ defines finitly many i and for each such i we know from (11.7) that $|\langle \boldsymbol{\psi_k}, \boldsymbol{T_{m_i}} \rangle| \to 0$ as $k \to \infty$. Therefore we can choose a number $k_l \in \mathbb{N}$ ($k_l \ge l$) so that for all these i

$$|\langle \boldsymbol{\psi_k}, \boldsymbol{T_{m_i}} \rangle| < 2^{-l} \text{ for } k \ge k_l\,.$$

We set $\varphi_l := \psi_{k_l}$. Thus the first inequalities (11.11) are shown. Next we look for the second inequalities

$$\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_j}, \boldsymbol{R_i} \rangle \ge 2^j \text{ for } 1 \le j \le i \le l\,. \tag{11.12}$$

The case $1 \le j \le i \le l-1$ are already done, and in these inequalities the $\varphi_j = \psi_{k_j}$ for $1 \le j \le l$ are already chosen, in particular $\varphi_l = \psi_{k_l}$ before in this induction step. Thus the new terms are for $1 \le j \le i = l$ and we have to choose m_l and $R_l = T_{m_l}$. The relevant new terms are for $1 \le j \le l$

$$\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\psi_{k_j}}, \boldsymbol{T_{m_l}} \rangle$$

and they have to be estimated from below. We know from (11.8) that as $m \to \infty$ the term $\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\psi_{k_j}}, \boldsymbol{T_m} \rangle$ converges to a value bigger that 2^{k_j}. Therefore we can choose a number $m_l \in \mathbb{N}$ ($m_l \ge l$) so that for $1 \le j \le l$

$$\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\psi_{k_j}}, \boldsymbol{T_m} \rangle \ge 2^{k_j} \ge 2^j \text{ for } m \ge m_l\,.$$

We set $R_l := T_{m_l}$. Thus the second inequalities (11.12) are shown.

Therefore we have proved the inequalities in (11.9). If we define for $m \in \mathbb{N}$

$$\eta_m := \sum_{j=1}^{m} \varphi_j\,,$$

this implies for $m > i$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\eta_m}, \boldsymbol{R_i} \rangle = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_j}, \boldsymbol{R_i} \rangle \\
&\ge \sum_{j=1}^{i} \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_j}, \boldsymbol{R_i} \rangle + \sum_{j=i+1}^{m} \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_j}, \boldsymbol{R_i} \rangle \\
&\ge \sum_{j=1}^{i} 2^j - \sum_{j=i+1}^{m} 2^{-j} \ge \sum_{j=1}^{i} 2^j - \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} \ge \sum_{j=1}^{i} 2^j - 2^{-i} \\
&\ge 2^i\,,
\end{aligned}$$

hence

$$\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\eta_m}, \boldsymbol{R_i} \rangle \to \infty \qquad \text{for } m > i \text{ with } i \to \infty. \tag{11.13}$$

This is in contradiction to what we show now. It exists

$$\eta := \lim_{m\to\infty} \eta_m = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j\,, \quad \eta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}; Y)\,. \tag{11.14}$$

To show (11.14), we conclude from (11.6) that for every $k \in \mathbb{N}$, since $k_i \ge i \ge k$ for large i,

$$\begin{gathered}
\operatorname{supp}\varphi_i = \operatorname{supp}\psi_{k_i} \subset U\,, \\
\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^k(U)} = \|\psi_{k_i}\|_{\mathcal{C}^k(U)} \le \|\psi_{k_i}\|_{\mathcal{C}^{k_i}(U)} \le 2^{-k_i} \le 2^{-i}\,,
\end{gathered}$$

which shows that η is pointwise defined and in addition η is in $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y)$. Thus (11.14) is shown. Letting $\zeta_m := \eta - \eta_m \in \mathscr{D}(\mathcal{U};Y)$ it follows from 2.3 that

$$\langle \boldsymbol{\zeta_m} , \boldsymbol{R_i} \rangle \to 0 \text{ as } m \to \infty \,,$$

hence

$$\langle \boldsymbol{\eta} , \boldsymbol{R_i} \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta_m} , \boldsymbol{R_i} \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle \boldsymbol{\eta_m} , \boldsymbol{R_i} \rangle \,. \tag{11.15}$$

Obviously, (11.15) contradicts (11.13). □

Beweis der zusätzlichen Eigenschaft [9, 2.2 Beweis des Satzes]. Wir nehmen an, dass der erste Teil schon bewiesen ist, d.h es ist $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$. Wir haben zu zeigen

$$\begin{aligned} &\forall\, U \subset\subset \mathcal{U} :\ \exists\, C \geq 0 :\ \exists\, k \in \mathbb{N}_0 : \\ &\forall\, m \in \mathbb{N} :\ \forall\, \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(U) :\ |\langle \boldsymbol{\zeta} , \boldsymbol{T_m} \rangle| \leq C\|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U};Y)} \,. \end{aligned} \tag{11.16}$$

Nimm an das Gegenteil ist wahr, also

$$\begin{aligned} &\exists\, U \subset\subset \mathcal{U} :\ \forall\, C \geq 0 :\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0 : \\ &\exists\, m \in \mathbb{N} :\ \exists\, \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(U) :\ |\langle \boldsymbol{\zeta} , \boldsymbol{T_m} \rangle| > C\|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U};Y)} \,. \end{aligned} \tag{11.17}$$

Wähle insbesondere $C = 2^{2k}$. Dann folgt aus (11.17)

$$\begin{aligned} &\exists\, U \subset\subset \mathcal{U} :\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0 : \\ &\exists\, m \in \mathbb{N} :\ \exists\, \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(U) :\ |\langle \boldsymbol{\zeta} , \boldsymbol{T_m} \rangle| > 2^{2k}\|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U};Y)} \,. \end{aligned} \tag{11.18}$$

Now let $U \subset\subset \mathcal{U}$ according to (11.18) and for $k \in \mathbb{N}$ let T_{m_k} and $\zeta_k \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ as in (11.18), that is,

$$|\langle \boldsymbol{\zeta_k} , \boldsymbol{T_{m_k}} \rangle| > 2^{2k}\|\zeta_k\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U})} \,.$$

Then

$$\widetilde{\psi}_k := \frac{\zeta_k}{2^k\|\zeta_k\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U})}}$$

satisfy $\left|\left\langle \boldsymbol{\widetilde{\psi}_k} , \boldsymbol{T_{m_k}} \right\rangle\right| > 2^k$ by the linearity of T_{m_k}. If we multiply $\widetilde{\psi}_k$ by the number

$$\sigma_k := \frac{\overline{\left\langle \boldsymbol{\widetilde{\psi}_k} , \boldsymbol{T_{m_k}} \right\rangle}}{|\left\langle \boldsymbol{\widetilde{\psi}_k} , \boldsymbol{T_{m_k}} \right\rangle|}$$

satisfying $|\sigma_k| = 1$ we obtain that $\psi_k := \sigma_k\widetilde{\psi}_k$ satisfies

$$\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{\psi_k} , \boldsymbol{T_{m_k}} \rangle > 2^k \text{ for all } k \ \,, \tag{11.19}$$

and obviously it is for all k

$$\operatorname{supp}\psi_k \subset U \quad \text{ and } \quad \|\psi_k\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U})} \leq 2^{-k} \,, \tag{11.20}$$

therefore $\|\psi_k\|_{\mathcal{C}^l(\overline{U})} \to 0$ as $k \to \infty$ for all $l \in \mathbb{N}$. Since $T_m \in \mathscr{D}'(\mathcal{U};Y)$, there exist $C(T_m,U)$ and $k(T_m,U)$ with

$$|\langle \boldsymbol{\zeta} , \boldsymbol{T_m} \rangle| \leq C(T_m,U)\|\zeta\|_{\mathcal{C}^{k(T_m,U)}(\overline{U})} \text{ for all } \zeta \in \mathscr{D}(U;Y) \,.$$

We conclude that $|\langle \boldsymbol{\psi_k} , \boldsymbol{T_m} \rangle| \le C(T_m, U)\|\psi_k\|_{\mathcal{C}^{k(T_m,U)}(\overline{U})} \to 0$ as $k \to \infty$, that is for each m

$$|\langle \boldsymbol{\psi_k} , \boldsymbol{T_m} \rangle| \to 0 \text{ as } k \to \infty . \tag{11.21}$$

We now use (11.19) and (11.21) to construct subsequences $(R_i, \varphi_j) = (T_{m_{k_i}}, \psi_{k_j})$ for $i, j \in \mathbb{N}$, which satisfy

$$\begin{aligned} &|\langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{R_i} \rangle - \langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{T} \rangle| < 2^{-j} \text{ for } j < i, \\ &|\langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{R_i} \rangle| < 2^{-j} \text{ for } i < j, \\ &\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_i} , \boldsymbol{R_i} \rangle \ge 2^i \text{ for all } i. \end{aligned} \tag{11.22}$$

This subsequences are constructed inductively in $l \in \mathbb{N}$, where for given l the inequalities are considered as

$$\begin{aligned} &|\langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{R_i} \rangle - \langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{T} \rangle| < 2^{-j} \text{ for } 1 \le j < i \le l, \\ &|\langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{R_i} \rangle| < 2^{-j} \text{ for } 1 \le i < j \le l, \\ &\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_i} , \boldsymbol{R_i} \rangle \ge 2^i \text{ for } 1 \le i \le l. \end{aligned} \tag{11.23}$$

The base of induction is $l = 1$. Then the only relevant term is

$$\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_i} , \boldsymbol{R_i} \rangle \ge 2^i \text{ for } i = l = 1.$$

We set $\varphi_1 := \psi_1$ and $R_1 := T_{m_1}$ and use (11.19).

We have to do the induction step from $l - 1 \ge 1$ to l. First we consider the inequalities

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{R_i} \rangle - \langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{T} \rangle| &< 2^{-j} \text{ for } 1 \le j < i = l, \\ |\langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{R_i} \rangle| &< 2^{-j} \text{ for } 1 \le i < j = l. \end{aligned} \tag{11.24}$$

For the first inequality, that is for $1 \le j \le l - 1$, we use that

$$|\langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{T_{m_k}} \rangle - \langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{T} \rangle| < 2^{-j}$$

for k large enough, since the sequence $(T_m)_m$ converges to T. Further by (11.21) we know that for $1 \le i \le l - 1$

$$|\langle \boldsymbol{\psi_k} , \boldsymbol{R_i} \rangle| < 2^{-l}$$

for k large enough. Thus we can choose in both inequalities $k = k_l \ge l$ and obtain that

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{T_{m_{k_l}}} \right\rangle - \langle \boldsymbol{\varphi_j} , \boldsymbol{T} \rangle\right| < 2^{-j} \text{ for } 1 \le j < l, \\ &|\langle \boldsymbol{\psi_{k_l}} , \boldsymbol{R_i} \rangle| < 2^{-l} \text{ for } 1 \le i < l. \end{aligned}$$

We now define $\varphi_l := \psi_{k_l}$ and $R_l := T_{m_{k_l}}$ to satisfy (11.24). It follows using (11.19)

$$\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_l} , \boldsymbol{R_l} \rangle = \mathrm{Re}\left\langle \boldsymbol{\psi_{k_l}} , \boldsymbol{T_{m_{k_l}}} \right\rangle \ge 2^{k_l} \ge 2^l ,$$

that is the inequality

$$\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{\varphi_l} , \boldsymbol{R_l} \rangle \ge 2^l . \tag{11.25}$$

Thus (11.24) and (11.25) show the induction step. Therefore we have proved the inequalities in (11.22). If we define for $m \in \mathbb{N}$

$$\eta_m := \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \, ,$$

this implies for $m > i$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\langle\, \boldsymbol{\eta_m} \,, \boldsymbol{R_i} \,\rangle = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}\langle\, \boldsymbol{\varphi_j} \,, \boldsymbol{R_i} \,\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle\, \boldsymbol{\varphi_i} \,, \boldsymbol{R_i} \,\rangle + \sum_{j=i+1}^{m} \operatorname{Re}\langle\, \boldsymbol{\varphi_j} \,, \boldsymbol{R_i} \,\rangle \\
&+ \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{Re}\big(\langle\, \boldsymbol{\varphi_j} \,, \boldsymbol{R_i} \,\rangle - \langle\, \boldsymbol{\varphi_j} \,, \boldsymbol{T} \,\rangle\big) + \operatorname{Re}\Big\langle\, \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{\varphi_j} \,, \boldsymbol{T} \,\Big\rangle \\
&\geq 2^i - \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{-j} + \operatorname{Re}\langle\, \boldsymbol{\eta_{i-1}} \,, \boldsymbol{T} \,\rangle \\
&\geq 2^i - 2 + \operatorname{Re}\langle\, \boldsymbol{\eta_{i-1}} \,, \boldsymbol{T} \,\rangle \, .
\end{aligned}$$

Since it is assumed that (the first part is already proved) we know $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U}; Y)$, it follows that

$$\sup_i |\langle\, \boldsymbol{\eta_{i-1}} \,, \boldsymbol{T} \,\rangle| \leq \text{const},$$

that is because $\operatorname{supp} \eta_{i-1} \subset U$ and $\|\eta_{i-1}\|_{\mathcal{C}^k(\overline{U})} \leq 1$ (see the end of the first part of the proof). Hence it follows that

$$\operatorname{Re}\langle\, \boldsymbol{\eta_m} \,, \boldsymbol{R_i} \,\rangle \to \infty \qquad \text{for } m > i \text{ with } i \to \infty. \tag{11.26}$$

This is in contradiction to what has been shown at the end of the first part of the proof. □

Referenzen: Jäger [9, §2], Walter [16, §4 I,II,IX Der Cauchysche Hauptwert], [Wikipedia: Cauchy principal value], [Wikipedia: Cauchyscher Hauptwert].

Wir nehmen nun an, dass $T_\varepsilon \in \mathscr{D}'(\mathcal{U}; \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, und dass

$$\langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{T} \,\rangle := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{T_\varepsilon} \,\rangle \tag{11.27}$$

für alle $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ existiert. Dann ist $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ nach 11.1, denn es gilt für jede Folge $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von gegen Null konvergenten positiven Zahlen, dass

$$\lim_{m \to \infty} \langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{T_{\varepsilon_m}} \,\rangle$$

existiert, und da der Limes gleich $\langle\, \boldsymbol{\zeta} \,, \boldsymbol{T} \,\rangle$ ist, folgt $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U}; \mathbb{R})$. Das wird nun ausgenutzt für uneigentliche Integrale, bei denen sich positive und negative Terme gegenseitig wegheben.

11.2 Cauchy'scher Haupwert. Es sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Sind dann für $\varepsilon > 0$

$$g_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathcal{U}} \setminus \Sigma)$$

und existiert für alle $\zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U})$

$$\langle \zeta\,, S \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathcal{U}\setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\Sigma)} \zeta g_\varepsilon \,\mathrm{dL}^n\,,$$

so ist $S \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$. Der Integrallimes wird ***Cauchy'scher Haupwert*** genannt.

Dieser Wert wird auch mit "CH" (*de:* Cauchy'scher Haupwert), "V.P." (*fr:* valeur principale), "P.V." (*en:* principal value) bezeichnet.

Beweis von $S \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$. Es sind durch

$$\langle \zeta\,, T_\varepsilon \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \int_{\mathcal{U}\setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\Sigma)} \zeta g_\varepsilon \,\mathrm{dL}^n$$

Distributionen $T_\varepsilon \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ definiert, für die

$$\langle \zeta\,, S \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})} := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle \zeta\,, T_\varepsilon \rangle_{\mathscr{D}(\mathcal{U})}$$

nach Voraussetzung existiert. Also ist 11.1 anwendbar. □

11.3 Beispiel. Let $\Omega = \,]-1,1[\, \in \mathbb{R}$. The definition

$$\langle \zeta\,, S \rangle := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega \setminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \frac{\zeta(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

defines a distribution.

Beweis. We compute for $x \neq 0$

$$\frac{\zeta(x)}{x} = \zeta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\zeta(x)\log(|x|)\Big) - \zeta'(x)\log(|x|)\,,$$

and therefore

$$\int_{\Omega \setminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \frac{\zeta(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\Big[\ \zeta(x)\log(|x|)\ \Big]_{x=-\varepsilon}^{x=+\varepsilon} - \int_{\Omega \setminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \zeta'(x)\log(|x|)\,\mathrm{d}x$$

with

$$\Big[\ \zeta(x)\log(|x|)\ \Big]_{x=-\varepsilon}^{x=+\varepsilon} = \log(\varepsilon)(\zeta(\varepsilon) - \zeta(-\varepsilon)) \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0$$

and

$$\int_{\Omega \setminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \zeta'(x)\log(|x|)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \zeta'(x)\log(|x|)\,\mathrm{d}x \text{ as } \varepsilon \to 0\,.$$

Also kann 11.2, that is 11.1, angewendet werden mit $n = 1$ und $\Sigma = \{0\}$. □

12 Topologie

This section is independent of all other sections. We introduce a topology in $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U};Y)$ and consider the dual space $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y)^*$. The outcome will be that [7]

$$\mathscr{D}'(\mathcal{U};Y) = \mathscr{D}(\mathcal{U};Y)^*\,.$$

Das geschieht folgendermaßen: Der Vektorraum $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U};Y)$ kann so mit einer Topologie $\mathcal{T}$ versehen werden, dass T genau dann eine Distribution ist, wenn T im entsprechenden Dualraum liegt, d.h. $T : \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U};Y) \to \mathbb{K}$ linear und stetig bzgl. der Topologie $\mathcal{T}$ ist. Man bezeichnet $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U};Y)$, versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$, dann mit $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y)$. Der Dualraum wird mit $\mathscr{D}(\mathcal{U};Y)^*$ bezeichnet.

Referenzen: Alt [1, Section 3: Distributions], Jäger [9, Kapitel II §1: Die Topologie des Grundraums] and all other mathematical publications concerning the subject.

12.1 Topologie auf $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U};Y)$. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Definiere

$$p(\zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{D})}}{1 + \|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{D})}} \quad \text{für } \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U};Y) \text{ mit } \operatorname{supp}(\zeta) \subset D \subset\subset \mathcal{U}\,,$$

wobei die rechte Seite nicht von der Wahl von D abhängt. Wir wählen eine offene Überdeckung $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}$ mit Mengen $D_j \subset\subset D_{j+1} \subset \mathcal{U}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Für jede Folge $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_j > 0$ für $j \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$V_\varepsilon := \operatorname{conv}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{\, \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U};Y) \;;\; \operatorname{supp}(\zeta) \subset D_j \text{ und } p(\zeta) < \varepsilon_j \,\}\Big)\,,$$

sowie

$$\mathcal{T} := \big\{\, V \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U};Y) \;;\; \text{Zu } \zeta \in V \text{ gibt es ein } \varepsilon \text{ mit } \zeta + V_\varepsilon \subset V \,\big\}\,.$$

Dann gilt:

12.2 Lemma. The set $\mathcal{T}$ satisfies:

(1) p ist Fréchet-Metrik mit $p(r\zeta) \le r p(\zeta)$ für $r \ge 1$.

(2) Für alle ε ist $V_\varepsilon \in \mathcal{T}$.

(3) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie. Also bilden die Mengen V_ε eine Umgebungsbasis der 0 bzgl. $\mathcal{T}$.

(4) $\mathcal{T}$ ist unabhängig von der Wahl der Überdeckung $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Es sei bemerkt, dass $\mathcal{T}$ stärker als die von p induzierte Topologie ist. Dies folgt daraus, dass die von p induzierte Kugel $\mathrm{B}_\varrho(0) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$ gleich einer Umgebung in der $\mathcal{T}$-Topologie ist, nämlich $\mathrm{B}_\varrho(0) = V_\varepsilon$ mit $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $\varepsilon_j = \varrho$.

[7] Now the prime is justified.

Beweis (2). Sei $\zeta \in V_\varepsilon$. Betrachte eine endliche konvexe Kombination

$$\zeta = \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k \zeta_k \in V_\varepsilon \quad \text{mit } k_0 \in \mathbb{N},\ \alpha_k > 0,\ \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k = 1 \ , \tag{12.1}$$

wobei $\zeta_k \in \mathcal{C}_0^\infty(D_{j_k})$ mit $p(\zeta_k) < \varepsilon_{j_k}$. Wähle $0 < \theta < 1$, so dass $p(\zeta_k) < \theta\varepsilon_{j_k}$ für alle $k = 1, \ldots, k_0$ und setze $\delta = (\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_j := (1-\theta)\varepsilon_j$. Wir behaupten, dass $\zeta + V_\delta \subset V_\varepsilon$. Sei dazu

$$\eta = \sum_{l=1}^{l_0} \beta_l \eta_l \in V_\delta \quad \text{mit } l_0 \in \mathbb{N},\ \beta_l > 0,\ \sum_{l=1}^{l_0} \beta_l = 1 \ ,$$

wobei $\eta_l \in \mathcal{C}_0^\infty(D_{m_l})$ mit $p(\eta_l) < \delta_{m_l}$. Dann gilt unter Benutzung von (1)

$$p\big(\tfrac{1}{\theta}\zeta_k\big) \le \tfrac{1}{\theta} p(\zeta_k) < \varepsilon_{j_k} \quad \text{und} \quad p\big(\tfrac{1}{1-\theta}\eta_l\big) \le \tfrac{1}{1-\theta} p(\eta_l) < \varepsilon_{m_l} \ ,$$

d.h. $\frac{1}{\theta}\zeta_k$ und $\frac{1}{1-\theta}\eta_l$ liegen in V_ε. Wegen der Konvexität von V_ε ist daher auch

$$\zeta + \eta = \theta \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k \cdot \tfrac{1}{\theta}\zeta_k + (1-\theta)\sum_{l=1}^{l_0} \beta_l \cdot \tfrac{1}{1-\theta}\eta_l \in V_\varepsilon \ .$$

Damit ist bewiesen, dass $V_\varepsilon \in \mathcal{T}$. □

Beweis (3). Zu zeigen ist, dass $U^1 \cap U^2 \in \mathcal{T}$, falls $U^1, U^2 \in \mathcal{T}$. Dies folgt aus $V_\varepsilon \subset V_{\varepsilon^1} \cap V_{\varepsilon^2}$, wenn $\varepsilon_j := \min(\varepsilon_j^1, \varepsilon_j^2)$ für $j \in \mathbb{N}$. □

Beweis (4). Sei $\big(\widetilde{D}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ eine weitere Überdeckung und $\widetilde{V}_{\widetilde{\varepsilon}}$ mit $\widetilde{\varepsilon} = (\widetilde{\varepsilon}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine wie oben definierte Menge bzgl. dieser Überdeckung. Zu $j \in \mathbb{N}$ gibt es, da $\overline{D}_j$ kompakt mit $\overline{D}_j \subset \mathcal{U}$, ein $m_j \in \mathbb{N}$ mit $D_j \subset \widetilde{D}_{m_j}$. Mit $\varepsilon_j := \widetilde{\varepsilon}_{m_j}$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist dann $V_\varepsilon \subset \widetilde{V}_{\widetilde{\varepsilon}}$. □

12.3 Der Raum $\mathscr{D}(\mathcal{U})$. Wir bezeichnen den Vektorraum $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$, versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$ aus 12.1 mit $\mathscr{D}(\mathcal{U})$. Dann ist $\mathscr{D}(\mathcal{U})$ ein ***lokal konvexer topologischer Vektorraum***, d.h. es gilt:

(1) $\mathscr{D}(\mathcal{U})$ ist mit $\mathcal{T}$ ein Hausdorff-Raum.

(2) $\mathscr{D}(\mathcal{U})$ ist Vektorraum und die Addition und Skalarmultiplikation sind stetig (als Abbildungen von $\mathscr{D}(\mathcal{U}) \times \mathscr{D}(\mathcal{U})$ nach $\mathscr{D}(\mathcal{U})$ bzw. von $\mathbb{K} \times \mathscr{D}(\mathcal{U})$ nach $\mathscr{D}(\mathcal{U})$).

(3) Zu $\zeta \in U$ mit $U \in \mathcal{T}$ gibt es eine konvexe Menge $V \in \mathcal{T}$ mit $\zeta \in V \subset U$.

Beweis (3). V_ε in 12.1 sind nach Definition konvex. □

Beweis (2). Wir behaupten für jedes V_ε, dass $V_\delta + V_\delta \subset V_\varepsilon$, wenn $\delta = (\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_j := \frac{1}{2}\varepsilon_j$, woraus die Stetigkeit der Addition folgt. Zum Beweis seien

$$\zeta_l \in \mathcal{C}_0^\infty\big(D_{j_l}\big) \quad \text{mit } p\big(\zeta_l\big) < \delta_{j_l} \text{ für } l = 1, 2.$$

Dann ist $\zeta_1 + \zeta_2 = \frac{1}{2}(2\zeta_1 + 2\zeta_2)$ mit $p(2\zeta_l) \le 2p(\zeta_l) \le 2\delta_{j_l} = \varepsilon_{j_l}$, also ist $\zeta_1 + \zeta_2 \in V_\varepsilon$, da V_ε konvex ist. Dann gilt dies auch für beliebige Elemente $\zeta_1, \zeta_2 \in V_\delta$.

Zum Beweis der Stetigkeit der Skalarmultiplikation im Punkte $(\alpha_0, \zeta_0) \in \mathbb{K} \times \mathscr{D}(\mathcal{U})$ sei V_ε gegeben. Es sei $\zeta_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(D_{j_0})$. Schreibe

$$\alpha\zeta - \alpha_0\zeta_0 = \frac{1}{2}\big(2(\alpha-\alpha_0)\zeta_0 + 2\alpha(\zeta-\zeta_0)\big) \ .$$

Sei $|\,\alpha - \alpha_0\,| < \gamma \le \frac{1}{2}$ und $\zeta - \zeta_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(D_j)$ mit $p(\zeta-\zeta_0) < \delta_j$, wobei γ, δ_j zu wählen sind. Nun gilt $\|2\gamma\zeta_0\|_{\mathcal{C}^k(\overline{D}_{j_0})} \to 0$ für $\gamma \to 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also folgt

$$p\big(2(\alpha-\alpha_0)\zeta_0\big) \le p(2\gamma\zeta_0) \to 0 \quad \text{ wenn } \gamma \to 0.$$

Wählen wir nun $\gamma \le \frac{1}{2}$ mit $p(2\gamma\zeta_0) < \varepsilon_{j_0}$, so folgt $2(\alpha-\alpha_0)\zeta_0 \in V_\varepsilon$. Da $|\,2\alpha\,| \le 2(|\,\alpha_0\,| + \gamma) \le 2\,|\,\alpha_0\,| + 1$, ist außerdem

$$p\big(2\alpha(\zeta-\zeta_0)\big) \le (1 + 2\,|\,\alpha_0\,|)p(\zeta-\zeta_0) < \varepsilon_j \ ,$$

falls $\delta_j := (1+2\,|\,\alpha_0\,|)^{-1}\varepsilon_j$ gesetzt wird, also auch $2\alpha(\zeta-\zeta_0) \in V_\varepsilon$, und damit $\alpha\zeta \in \alpha_0\zeta_0 + V_\varepsilon$. Dann folgt dies auch für alle $\zeta \in \zeta_0 + V_\delta$, wobei $\delta := (\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$. □

Beweis (1). Seien $\zeta^1, \zeta^2 \in \mathscr{D}(\mathcal{U})$ mit $\zeta^1 \ne \zeta^2$ und $\zeta := \zeta^1 - \zeta^2$. Wir behaupten, dass

$$\big(\zeta^1 + V_\varepsilon\big) \cap \big(\zeta^2 + V_\varepsilon\big) = \emptyset \ ,$$

wenn $\varepsilon = (\varrho)_{j\in\mathbb{N}}$ und $\varrho > 0$ klein genug. In der Tat, falls $\eta^1, \eta^2 \in V_\varepsilon$ mit $\zeta^1 + \eta^1 = \zeta^2 + \eta^2$, so ist auch $-\eta^1 \in V_\varepsilon$, also

$$\zeta = \zeta^1 - \zeta^2 = (-\eta^1) + \eta^2 \in V_\varepsilon + V_\varepsilon \subset V_{2\varepsilon} \ ,$$

nach dem Beweis von (2). Schreibe ζ als konvexe Kombination wie in (12.1), so dass also

$$\frac{\|\zeta_k\|_{\mathcal{C}^0}}{1 + \|\zeta_k\|_{\mathcal{C}^0}} \le p(\zeta_k) < 2\varrho \ .$$

Daher folgt, falls $\varrho < \frac{1}{2}$,

$$0 \ne \|\zeta\|_{\mathcal{C}^0} \le \textstyle\sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k \|\zeta_k\|_{\mathcal{C}^0} \le \max_{k=1,\dots,k_0} \|\zeta_k\|_{\mathcal{C}^0} < \frac{2\varrho}{1-2\varrho} \ ,$$

was nicht möglich ist, falls ϱ in Abhängigkeit von ζ klein genug gewählt worden war. □

12.4 Lemma. Für jede Folge $(\zeta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}(\mathcal{U})$ gilt:

$$\zeta_m \to 0 \quad \text{ für } m \to \infty \text{ in } \mathscr{D}(\mathcal{U})$$

genau dann, wenn:

(1) Es gibt ein offenes $D \subset\subset \mathcal{U}$, so dass $\zeta_m \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$ für alle m.

(2) Für alle $D \subset\subset \mathcal{U}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\|\zeta_m\|_{\mathcal{C}^k(\overline{D})} \to 0$ für $m \to \infty$.

Beweis $\Leftarrow$. Da $\overline{D}$ kompakt, $\overline{D} \subset \mathcal{U}$, gibt es in der Überdeckung von 12.1 ein D_j mit $D \subset D_j$. Dann folgt zu gegebenem ε für ζ mit $\operatorname{supp}(\zeta) \subset D$ und alle $\bar{k}$

$$p(\zeta) \leq \sum_{k=0}^{\bar{k}} 2^{-k} \|\zeta\|_{\mathcal{C}^k(\overline{D})} + \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} 2^{-k} \leq \|\zeta\|_{\mathcal{C}^{\bar{k}}(\overline{D})} + 2^{-\bar{k}} ,$$

so dass also $p(\zeta_m) < \varepsilon_j$ für große m, denn wähle $\bar{k}$ mit $2^{-\bar{k}} \leq \frac{\varepsilon_j}{2}$ und m nach (2) groß genug so dass $\|\zeta_m\|_{\mathcal{C}^{\bar{k}}(\overline{D})} \leq \frac{\varepsilon_j}{2}$. Also ist $\zeta_m \in V_\varepsilon$. $\square$

Beweis $\Rightarrow$. Wäre (1) nicht erfüllt, so gibt es eine offene Überdeckung $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}$ mit $D_j \subset\subset \mathcal{U}$ und $D_{j-1} \subset D_j$, sowie $x_j \in D_j \setminus \overline{D_{j-1}}$ und eine Teilfolge $m_j \to \infty$, so dass $\zeta_{m_j}(x_j) \neq 0$. Dann ist

$$U := \Big\{ \zeta \in \mathscr{D}(\mathcal{U}) \; ; \; \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{2}{|\,\zeta_{m_j}(x_j)\,|} \|\zeta\|_{\mathcal{C}^0(\overline{D_j}\setminus D_{j-1})} \leq 1 \Big\}$$

konvexe Teilmenge von $\mathscr{D}(\mathcal{U})$. Da für alle j

$$\big\{ \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(D_j) \; ; \; p(\zeta) < \varepsilon_j \big\} \subset U \; , \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_j := \Big(1 + \sum_{i\leq j} \frac{2}{|\,\zeta_{m_i}(x_i)\,|} \Big)^{-1} ,$$

ist $V_\varepsilon \subset U$, wenn $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und V_ε bzgl. der Überdeckung $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definiert ist. Nach Definition der Topologie und da $\zeta_m \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathcal{U})$ für $m \to \infty$, muss daher $\zeta_m \in V_\varepsilon$ sein für große m. Nach Konstruktion von U liegen aber ζ_{m_j} nicht in U, ein Widerspruch. Dies zeigt (1).
Zu $k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ wählen wir nun $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $2^k \varepsilon_j = \big(1 + \frac{1}{\delta}\big)^{-1} > 0$ für alle j, so dass also

$$V_\varepsilon \subset \big\{ \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U}) \; ; \; \|\zeta\|_{\mathcal{C}^k} \leq \delta \big\} \; .$$

Für große m ist dann $\zeta_m \in V_\varepsilon$, also $\|\zeta_m\|_{\mathcal{C}^k} \leq \delta$. Dies zeigt (2). $\square$

12.5 Der Dualraum von $\mathscr{D}(\mathcal{U})$. Betrachte den Dualraum

$$\mathscr{D}(\mathcal{U})^* = \{ T : \mathscr{D}(\mathcal{U}) \to \mathbb{K} \, ; \; T \text{ linear und stetig} \}$$

von $\mathcal{D}(\mathcal{U})$. Dann gilt

$$\mathscr{D}(\mathcal{U})^* = \mathscr{D}'(\mathcal{U}) \; .$$

Beweis $\subset$. Sei $T \in \mathscr{D}(\mathcal{U})^*$. Wenn $T \notin \mathscr{D}'(\mathcal{U})$, so gibt es ein $D \subset\subset \mathcal{U}$ und $\zeta_m \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$ mit

$$1 = |\,T\zeta_m\,| > m \|\zeta_m\|_{\mathcal{C}^m(\overline{D})} \qquad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt dann $\|\zeta_m\|_{\mathcal{C}^k(\overline{D})} \to 0$ für $m \to \infty$, nach 12.4 konvergiert also $\zeta_m \to 0$ für $m \to \infty$ in $\mathscr{D}(\mathcal{U})$, und die Stetigkeit von T impliziert dann $T\zeta_m \to 0$ für $m \to \infty$, ein Widerspruch. $\square$

Beweis $\supset$. Sei $T \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$ und $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Ausschöpfung aus 12.1 und es gelte

$$|\,T\zeta\,| \leq C_j \|\zeta\|_{\mathcal{C}^{k_j}(\overline{D_j})} \qquad \text{für } \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(D_j).$$

Zu $\delta > 0$ sei $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definiert durch $\varepsilon_j := 2^{-k_j} \frac{\delta}{C_j + \delta}$. Dann gilt

$$\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(D_j) \text{ mit } p(\zeta) < \varepsilon_j \quad \Longrightarrow \quad |\, T\zeta \,| \le C_j \|\zeta\|_{\mathcal{C}^{k_j}(\overline{D_j})} \le \delta \ .$$

Da T linear ist, folgt dann $|\, T\zeta \,| \le \delta$ für alle $\zeta \in V_\varepsilon$ (mit V_ε wie in 12.1). Dies beweist die Stetigkeit von T. □

Literatur

[1] Hans Wilhelm Alt: *Lineare Funktionalanalysis*. 6. ed. Springer 2012 39, 46

[2] Hans Wilhelm Alt: *Linear Functional Analysis*. Springer 2016 39

[3] Hans Wilhelm Alt: *Analysis IV*. Script of the lecture in summer semester 2002. Uni Bonn 2003 21

[4] Hans Wilhelm Alt: *Mathematische Kontinuumsmechanik*. Technical University Munich TUM 2013
www-m6.ma.tum.de/∼alt/alt-continuum.pdf 1

[5] D. Bedeaux: *Nonequilibrium Thermodynamics and Statistical Physics of Surfaces*. Advance in Chemical Physics. Volume LXIV. Wiley & Sons 1986 [Bedeaux-AdvChemPhys1986.pdf] 3

[6] I.M. Gelfand, G.E. Schilow: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) II*. Hochschulbücher für Mathematik, Band 48. Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962 39

[7] Lars Hörmander: *Linear Partial Differential Operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Vol. 116. 3. Edition. Springer-Verlag 1969

[8] Lars Hörmander: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Second Edition. Springer Study Edition, Springer-Verlag 1980

[9] Willi Jäger: *Distributionstheorie*. Ausarbeitung der Vorlesung des Wintersemesters 1973/74. Universität Münster 1974 4, 6, 39, 42, 44, 46

[10] Peter Massopust: *Elemente der Distributionentheorie*. Vorlesung TUM MA5319. Vorlesungsmitschrift von Benjamin Sllner. Technische Universität München 2015

[11] Klaus-Heinrich Peters: *Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen*. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades des Fachbereichs Mathematik der Universität Hamburg. 2004 [Peters-dokserv.pdf] 3

[12] Laurent Schwartz: *Théorie des distributions*. Hermann 1973

[13] Francois Tréves: *Topoplogical Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Pure and Applies Mathematics. Academic Press 1967

[14] Francois Tréves: *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients*. Gordon and Breach 1966 21

[15] Francois Tréves: *Basic Linear Partial Differential Equations*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press 1975 37

[16] Wolfgang Walter: *Einführung in die Theorie der Distributionen*. 3. ed. BI-Wissenschaftsverlag 1994 39, 44

[17] A.H. Zemanian: *Distribution Theory and Transform Analysis*. Dover Publications 1965