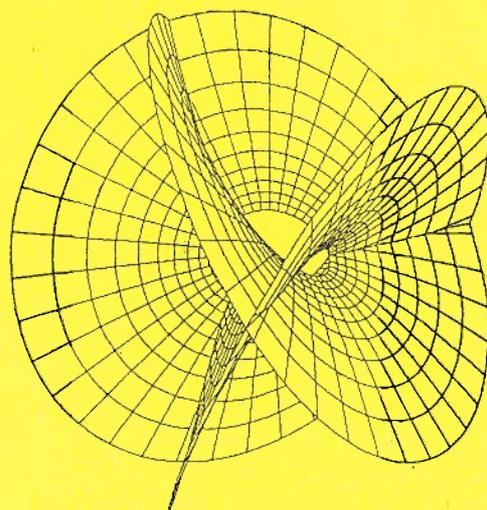


RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT  
B O N N



SONDERFORSCHUNGSBEREICH 256  
NICHTLINEARE PARTIELLE  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VORLESUNGSREIHE

Elliptische Probleme mit freiem Rand. Teil I

Hans Wilhelm Alt

no. 21

Diese Arbeit ist mit Unterstützung des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft getragenen Sonderforschungsbereiches 256 an der Universität Bonn entstanden und als Manuskript vervielfältigt worden.

Bonn, Juli 1991



---

**Elliptische Probleme  
mit freiem Rand. Teil I**

Hans Wilhelm Alt

---

Elliptic problems with free boundary. Part I

Hans Wilhelm Alt

AMS-Classification: 35R35, 35J20

Abstract. This is a script of a lecture held at the University of Bonn during summer semester 1988. In this lecture we present some elliptic free boundary problems which have been developed during the past 25 years.



# Inhaltsverzeichnis

## Teil I

1. Einführende Beispiele
2. Variationsungleichungen
3. Kapazität
4. Regularität für das Hindernisproblem

## Teil II

5. Minimumprobleme für nichtkonvexe Potentiale
6. Minimumprobleme mit freiem Rand

## Vorwort

Die vorliegende Schrift ist die Ausarbeitung einer Vorlesung, die ich im Sommersemester 1988 an der Universität Bonn gehalten habe. Diese Vorlesung soll einen Einblick in Probleme mit Freiem Rand geben, wobei Vorkenntnisse in Funktionalanalysis und der Theorie linearer elliptischer Differentialgleichungen vorausgesetzt werden.

Da freie Ränder in sehr verschiedenen Formen auftreten, handelt es sich bei diesem Themenkreis um ein methodisch nicht einheitliches Gebiet der Mathematik. In der Vorlesung wurden daher exemplarisch einige elliptische Probleme behandelt, deren Theorie in den vergangenen 25 Jahren entwickelt worden ist. Die Beweisführung wurde zum Teil so aufbereitet, daß sie der heutigen Sicht entspricht.

Ausgangspunkt für diese Schrift ist ein persönliches Manuskript, das ich wie üblich bei der Abhaltung einer Vorlesung anfertigte. Zu danken habe ich Barbara Stoth, die dieses Manuskript überarbeitet und zum Teil ergänzt hat. Diese Überarbeitung war Grundlage für die hier vorliegende, zum Teil wiederum korrigierte und erweiterte endgültige Version. Besonderer Dank gebührt Thomas Widmer, der sowohl Text als auch Zeichnungen in die vorliegende ansprechende Form gebracht hat.

Bonn, im März 1991

Hans Wilhelm Alt



# 1 Einführende Beispiele

Unter einem „Freien Rand“ verstehen wir den Übergang zwischen Medien, der a-priori nicht bekannt ist. Dies bedeutet, daß der Übergang lokal von dem globalen Zustand der Medien abhängt, und möglicherweise auch von den Gesetzen über diesen Übergang selbst. Bei zeitabhängigen Problemen, die hier nicht behandelt werden, kann sich der Grenzübergang zwischen den Medien im Laufe der Zeit verändern bzw. verschieben. Bei vielen Problemen ist der freie Rand lokal eine glatte Hyperfläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ , die zwei verschiedene Medien  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$  für  $i = 1, 2$  voneinander trennt. Nehmen wir an, daß die Eigenschaft der Medien beschrieben werden durch Funktionen  $u_i : \overline{\Omega}_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m \geq 1$ , und ggf. der freie Rand durch eine weitere Größe  $\bar{u} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ , so haben mathematische Formulierungen die Gestalt

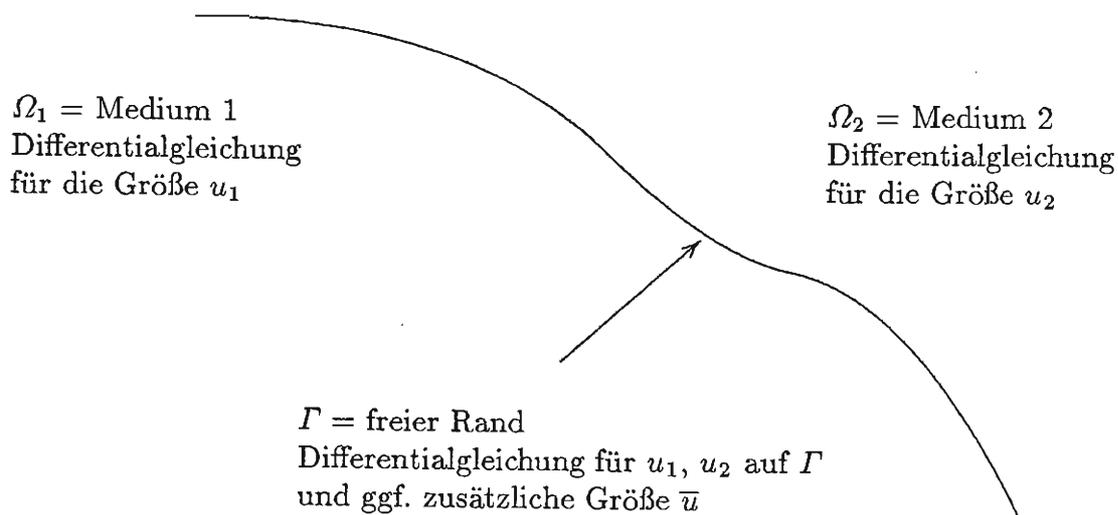


Bild 1.1: Schema für ein Zweiphasenproblem.

Dabei schließen wir den Fall ein, daß eine oder mehrere Differentialgleichungen von nullter Ordnung sind, zum Beispiel eine Dirichlet-Bedingung  $u_1 = u_2$  auf  $\Gamma$ . Ein weiteres Beispiel ist  $u_2 = 0$  in  $\overline{\Omega}_2$ , was bedeutet, daß das Medium 2 keinen Einfluß auf die lokale Gestalt des freien Randes hat, in anderen Worten, wir haben ein Problem für ein einziges Medium  $\Omega_1$  mit freier Oberfläche  $\Gamma$  vorliegen.

In dieser Vorlesung konzentrieren wir uns auf Probleme mit den Dirichlet-Bedingungen

$$u_1 = 0 = u_2 \quad \text{auf } \Gamma .$$

Darüberhinaus betrachten wir diejenige Unterklasse von Problemen mit freiem Rand, für die es eine Funktion

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \Omega := \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$$

gibt, so daß

$$\begin{aligned} u_1 = u &\geq 0 && \text{in } \Omega_1, \\ u_2 = u &\leq 0 && \text{in } \Omega_2, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{u > 0\}, \\ \Omega_2 &:= \{u < 0\}, \\ \Gamma &:= \{u = 0\}. \end{aligned}$$

Wir sagen dann, das Problem mit freiem Rand wird durch eine globale Größe beschrieben. Die mathematische Formulierung dieser Probleme besteht oft in einer Differentialgleichung für  $u$ , welche Koeffizienten enthält, die für  $u = 0$  unstetig sind. In diesem Fall können wir also den freien Rand als das Urbild einer „Irregularität“ oder als „konzentrierte Nichtlinearität“ bezeichnen. Der Vorteil einer globalen Größe  $u$  steht dem Nachteil gegenüber, daß a-priori nicht bekannt ist, daß für Lösungen  $u$  der freie Rand  $\Gamma := \{u = 0\}$  ein  $(n - 1)$ -dimensionales Objekt ist. Sollte  $\Gamma$  ein positives  $n$ -dimensionales Maß besitzen, so sprechen wir von einer „Mischzone“.

Dabei muß auf folgenden Umstand hingewiesen werden. Sollte bei der physikalischen Herleitung einer Differentialgleichung von einer Hyperfläche als freiem Rand ausgegangen worden sein, so ist bei Auftreten von Mischzonen a-posteriori die physikalische Relevanz der gefundenen Lösung nachzuweisen.

Im folgenden geben wir einige Probleme an, die in die oben beschriebene Unterklasse fallen.

**1.1 Diffusion.** Eine Größe  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  werde mit Fluß  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  transportiert. Die Massenerhaltung mit Verbrauchsterm  $x \mapsto f(x, u(x))$  besagt

$$\nabla \cdot v + f = 0.$$

Wir gehen von einem linearen Diffusionsgesetz aus, d.h. die Diffusion von  $u$  sei beschrieben durch

$$v = -(a \nabla u + e)$$

mit einer positiv definiten Matrix  $x \mapsto a(x, u(x))$  und einem Vektorfeld  $x \mapsto e(x, u(x))$ . Wir erhalten die Diffusionsgleichung

$$-\nabla \cdot (a(\cdot, u) \nabla u + e(\cdot, u)) + f(\cdot, u) = 0.$$

Diese Gleichung muß im Distributionssinne interpretiert werden, d.h. es gilt

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \zeta \cdot (a(\cdot, u) \nabla u + e(\cdot, u)) + \zeta f(\cdot, u) \right) = 0$$

für alle  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ . Im allgemeinen kann in dieser Gleichung nicht weiter partiell integriert werden, d.h. wir müssen voraussetzen, daß  $\nabla u$  eine Funktion ist, oder  $u \in H_{loc}^{1,1}(\Omega)$ . Für Lösungen  $u$  definieren wir  $\Omega_i$  wie oben und  $u_i := u$  auf  $\Omega_i$ . Wir betrachten nacheinander die Fälle, daß eine der Koeffizientenfunktionen  $a(x, \cdot)$ ,  $e(x, \cdot)$ ,  $f(x, \cdot)$  einen Sprung bei 0 aufweisen.

**1.2 Sprung im Diffusionskoeffizienten.** Wir nehmen an, daß es stetige matrixwertige Abbildungen  $a_i$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  gibt mit

$$a(x, z) = \begin{cases} a_1(x, z) & \text{für } z > 0 \text{ ,} \\ a_2(x, z) & \text{für } z < 0 \text{ .} \end{cases}$$

Weiter sei  $e = 0$  und  $f = 0$ . Die schwache Diffusionsgleichung in 1.1 ergibt dann folgende starke Formulierung unter der Voraussetzung, daß  $\Gamma$  eine glatte Hyperfläche und  $u_i$  auf  $\Gamma$  glatt fortsetzbar sind:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a_i(\cdot, u_i) \nabla u_i) &= 0 && \text{in } \Omega_i, \\ \nu_\Gamma \cdot a_1(\cdot, u_1) \nabla u_1 &= \nu_\Gamma \cdot a_2(\cdot, u_2) \nabla u_2 && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wobei  $\nu_\Gamma$  eine Normale an  $\Gamma$  bezeichnet.

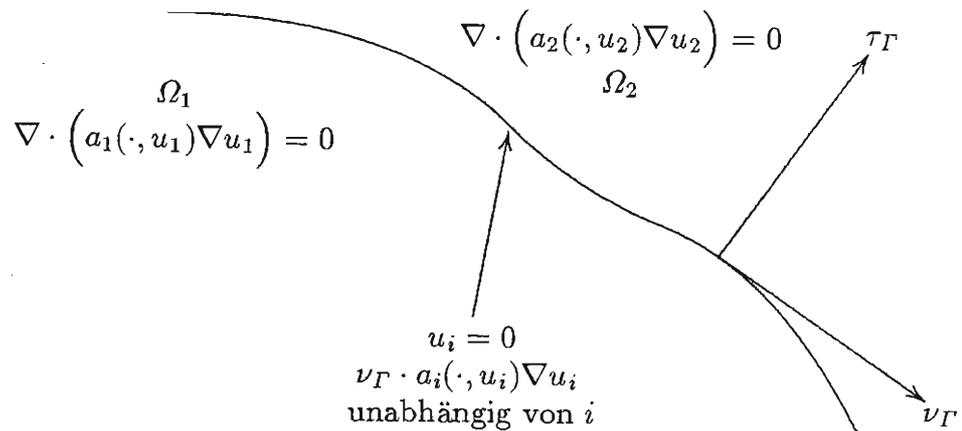


Bild 1.2: Diffusionsproblem mit zwei Phasen

Die Eigenschaft  $u_1 = 0 = u_2$  auf  $\Gamma$  liefert darüberhinaus, daß

$$\tau_\Gamma \cdot \nabla u_i = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

für Tangentialvektoren  $\tau_\Gamma$  an  $\Gamma$ . Daraus folgt  $\nabla u_i = \nabla u_i \cdot \nu_\Gamma \nu_\Gamma$  auf  $\Gamma$ , so daß insgesamt auf  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \tau_\Gamma \cdot \nabla u_i &= 0 \text{ ,} \\ \alpha_{1,\Gamma} \nu_\Gamma \cdot \nabla u_1 &= \alpha_{2,\Gamma} \nu_\Gamma \cdot \nabla u_2 \text{ ,} \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha_{i,\Gamma} := \nu_\Gamma \cdot a_i(\cdot, 0) \nu_\Gamma > 0 \text{ ,}$$

da  $a_i$  positiv definit.

Nun sei  $x \in \Gamma$ . Macht  $a(x, \cdot)$  einen Sprung bei 0 in dem Sinn, daß

$$e \cdot a_1(x, 0)e \neq e \cdot a_2(x, 0)e \quad \text{für ein } e \in \mathbb{R}^n \text{ ,}$$

so gibt es Situationen für die Normale  $\nu_\Gamma(x)$ , z.B.  $\nu_\Gamma(x) = e$ , für die aus obigen Eigenschaften für  $\nabla u_i$  folgt, daß

entweder  $\nabla u_1(x) \neq \nabla u_2(x)$  oder  $\nabla u_1(x) = 0 = \nabla u_2(x)$ ,

d.h.  $\nabla u(x)$  kann einen Sprung haben. Die maximal zu erwartende Regularität von  $u$  ist daher die Lipschitzstetigkeit.

Es sei bemerkt, daß es sich bei dem betrachteten Problem um einen „heb-  
baren freien Rand“ handelt, falls die  $z$ -Abhängigkeit von  $z \mapsto a(x, z)$  skalar  
faktoriert. Sei etwa

$$a(x, z) = \varphi(x, z)a_0(x)$$

wobei  $\varphi$  reellwertig sei und entsprechend zu oben

$$\varphi(x, z) = \begin{cases} \varphi_1(x, z) & \text{für } z > 0 \\ \varphi_2(x, z) & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

mit Lipschitzstetigen Funktionen  $\varphi_i$ . Unter dieser Voraussetzung betrachten  
wir die Kirchhoff-Transformation  $w := \Phi(\cdot, u)$  mit

$$\Phi(x, z) := \int_0^z \varphi(x, s) ds .$$

Dann ist  $\Phi(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strikt monoton und es gilt

$$\nabla w(x) = \varphi(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) + \int_0^{u(x)} \varphi_{,x}(x, s) ds$$

und  $w$  ist Lösung von

$$\nabla \cdot \left( a_0(x) \nabla w(x) - e(x, w(x)) \right) = 0 ,$$

wenn

$$e(x, z) := \int_0^{\Phi^{-1}(x, z)} \varphi_{,x}(x, s) ds \cdot a_0(x) .$$

Dabei bezeichne  $\Phi^{-1}(x, \cdot)$  die Umkehrabbildung von  $\Phi(x, \cdot)$ . Falls also  $u$   
Lösung des Problems mit freiem Rand ist, so löst  $w$  ein elliptisches Stan-  
dardproblem, d.h. eine Differentialgleichung mit in  $w$  stetigen Koeffizienten,  
und wir erhalten höhere Regularitätsaussagen für  $w$ . Da  $z \mapsto \Phi(x, z)$  strikt  
monoton ist, lassen sich diese auf  $u$  zurückholen.

**1.3 Sprung im Driftterm.** Wir nehmen an, daß mit stetigen Vektorfeldern  
 $e_i$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  gilt

$$e(x, z) = \begin{cases} e_1(x, z) & \text{für } z > 0 , \\ e_2(x, z) & \text{für } z < 0 . \end{cases}$$

Weiter sei  $a = \text{Id}$  und  $f = 0$ . Aus der Diffusionsgleichung in 1.1 erhalten wir  
dann

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla u_i + e_i(\cdot, u_i)) &= 0 \quad \text{in } \Omega_i, \\ \nu_\Gamma \cdot (\nabla u_1 + e_1(\cdot, u_1)) &= \nu_\Gamma \cdot (\nabla u_2 + e_2(\cdot, u_2)) \quad \text{auf } \Gamma.\end{aligned}$$

Ist  $x \in \Gamma$  und macht  $e(x, \cdot)$  einen Sprung bei 0, d.h.

$$e_1(x, 0) \neq e_2(x, 0),$$

so gibt es wie in 1.2 Situationen für die Normale  $\nu_\Gamma(x)$ , für die

$$\nabla u_1(x) \neq \nabla u_2(x)$$

folgt, d.h.  $\nabla u$  kann einen Sprung haben.

**1.4 Sprung im Verbrauchsterm.** Wir betrachten den Fall daß mit stetigen Funktionen  $f_i$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  gilt

$$f(x, z) = \begin{cases} f_1(x, z) & \text{für } z > 0, \\ f_2(x, z) & \text{für } z < 0, \end{cases}$$

und daß  $a = \text{Id}$  sowie  $e = 0$ . Aus der Differentialgleichung in 1.1 erhalten wir dann

$$-\Delta u_i + f_i(\cdot, u_i) = 0 \quad \text{in } \Omega_i$$

und  $\nu_\Gamma \cdot \nabla u_1 = \nu_\Gamma \cdot \nabla u_2$  auf  $\Gamma$ . Da die tangentialen Komponenten von  $\nabla u_i$  auf  $\Gamma_i$  verschwinden, folgt

$$\nabla u_1 = \nabla u_2 \quad \text{auf } \Gamma,$$

d.h.  $\nabla u$  ist stetig. Macht  $f(x, \cdot)$  in einem Punkt  $x \in \Gamma$  einen Sprung, d.h.

$$f_1(x, 0) \neq f_2(x, 0)$$

so folgt

$$\Delta u_1(x) \neq \Delta u_2(x),$$

d.h. die zweite Ableitung  $D^2u$  springt im Punkte  $x$ . Ersetzt man die Unstetigkeit von  $f(x, \cdot)$  (und analog für  $a(x, \cdot)$  bzw.  $e(x, \cdot)$  in 1.2 und 1.3) durch Irregularitäten höherer Ordnung, so kann eine Unstetigkeit für  $u$  frühestens in den entsprechend höheren Ableitungen auftreten. Zum Beispiel, wenn  $f$  stetig ist, aber

$$f_{1,z}(x, 0) \neq f_{2,z}(x, 0),$$

so folgt, falls  $e := \nabla u(x) \neq 0$ ,

$$-\Delta \partial_e u_i + f_{i,z}(\cdot, u_i) \partial_e u_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i$$

und somit  $\Delta \partial_e u_1(x) \neq \Delta \partial_e u_2(x)$ , d.h. die dritten Ableitungen  $D^3u$  sind unstetig in  $x$ .

Im folgenden betrachten wir Variationsprobleme.

**1.5 Minimumprobleme mit Nebenbedingungen.** Wir betrachten ein klassisches elliptisches Minimumproblem für das Funktional

$$E(u) := \int_{\Omega} f(\cdot, u, \nabla u) ,$$

wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  glatt sei. Als Strukturvoraussetzung nehmen wir an, daß  $p \mapsto f(x, z, p)$  konvex ist, oder äquivalent dazu die Monotonie

$$(p_1 - p_2) \cdot (f_{,p}(x, z, p_1) - f_{,p}(x, z, p_2)) \geq 0 \quad \text{für } x \in \Omega, z \in \mathbb{R} \text{ und } p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n .$$

Wir wollen  $E$  minimieren auf einer konvexen Menge  $M$ . Ist  $u \in M$  absolutes Minimum und  $v \in M$ , so auch  $u_\varepsilon := u + \varepsilon(v - u)$  für  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , und es folgt (falls etwa  $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ )

$$\begin{aligned} 0 \leq \partial_{v-u} E(u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (E(u_\varepsilon) - E(u)) \\ &= \int_{\Omega} (\nabla(v - u) \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) + (v - u) f_{,z}(\cdot, u, \nabla u)) . \end{aligned}$$

Allgemeiner nennen wir eine solche Ungleichung eine Variationsungleichung. Falls  $M$  keine Nebenbedingungen im Gebiet  $\Omega$  enthält, d.h. falls  $u + \zeta \in M$  für alle  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ , dann ist  $u$  schwache Lösung von

$$L(u) := -\nabla \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) + f_{,z}(\cdot, u, \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega .$$

Das Standardbeispiel für eine Nebenbedingung in  $\Omega$  ist das Hindernisproblem, d.h. es sei

$$M := \{v : \underline{u} \leq v \leq \overline{u} \text{ in } \Omega\}$$

mit vorgegebenen Hindernissen  $\underline{u}, \overline{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind  $\underline{u}, \overline{u}$  stetig mit  $\underline{u} < \overline{u}$ , so zerlegt  $u$ , falls stetig, das Gebiet  $\Omega$  in drei Phasen

$$\Omega_0 := \{\underline{u} < u < \overline{u}\} , \quad \Omega_- := \{u = \underline{u}\}^\circ , \quad \Omega_+ := \{u = \overline{u}\}^\circ ,$$

sowie zwei freie Ränder

$$\Gamma_- := \Omega \cap \partial\{u = \underline{u}\} , \quad \Gamma_+ := \Omega \cap \partial\{u = \overline{u}\} .$$

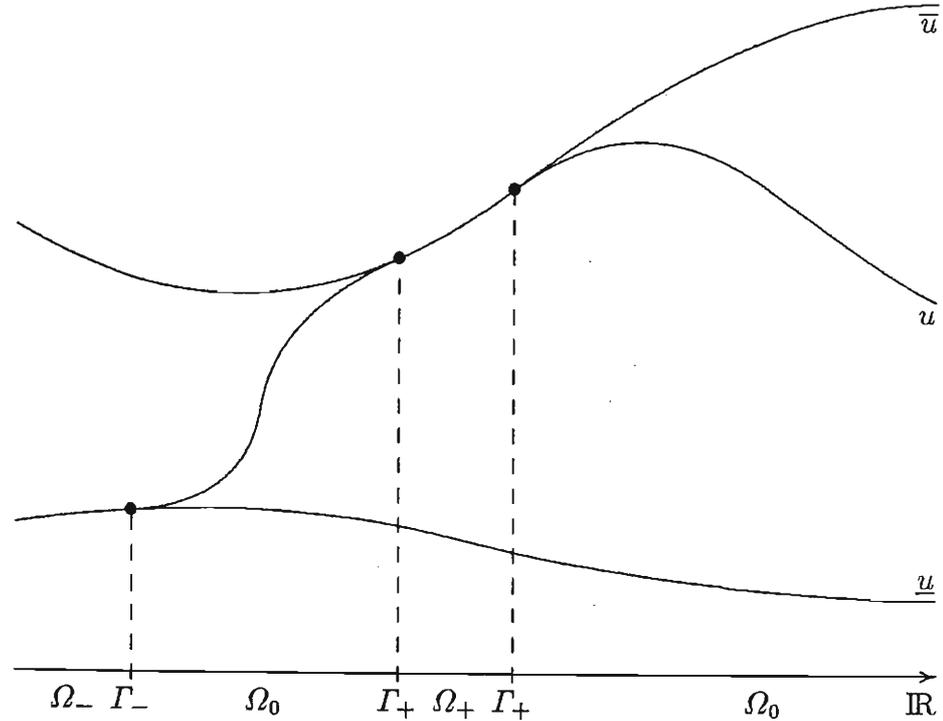


Bild 1.3: Phasen und Koinzidenzmengen für das Hindernisproblem

Die Mengen  $\{u = \underline{u}\}$  und  $\{u = \bar{u}\}$  werden auch als Koinzidenzmengen bezeichnet. Die erste Variation für das Hindernisproblem liefert die folgenden Aussagen:

**1.6 Lemma.** Unter den Annahmen, daß  $\underline{u}, \bar{u} \in C^1(\Omega)$ , daß  $u \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ , und daß  $\Gamma_{\pm}$  von der Klasse  $C^1$  sind, folgt:

$$(1.6.1) \quad L(u) = 0 \quad \text{in } \Omega_0,$$

$$(1.6.2) \quad L(\underline{u}) \geq 0 \quad \text{in } \Omega_-, \quad \text{und} \quad L(\bar{u}) \leq 0 \quad \text{in } \Omega_+,$$

$$(1.6.3) \quad \nabla u \in C^0(\Omega) \quad , \quad \text{falls } f_{,p} \text{ strikt monoton ist.}$$

*Beweis.* Sei  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\zeta \geq 0$ . Ist  $\text{supp } \zeta \subset \{u < \bar{u}\}$ , gilt  $u + \varepsilon\zeta \in M$  für kleines  $\varepsilon > 0$ , so daß also  $\partial_\zeta E(u) \geq 0$ . Es folgt, daß

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } \Omega \cap \{u < \bar{u}\}.$$

Entsprechend folgt

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega \cap \{u > \underline{u}\}.$$

Daraus folgen (1.6.1) und (1.6.2). Ersetzen wir  $\zeta$  durch  $\zeta d_\delta$  mit  $\delta > 0$  und

$$d_\delta(x) := \max \left( 0, 1 - \frac{\text{dist}(x, \Gamma_-)}{\delta} \right) ,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq \partial_{\zeta d_\delta} E(u) &= \int_{\Omega} \zeta \nabla d_\delta \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) \\ &\quad + \int_{\Omega} d_\delta \left( \nabla \zeta \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) + \zeta f_{,z}(\cdot, u, \nabla u) \right) . \end{aligned}$$

Für  $\delta \rightarrow 0$  konvergiert das zweite Integral gegen 0, und das erste gegen

$$\int_{\Gamma_-} \zeta \nu_{\Gamma_-} \cdot \left( f_{,p}(\cdot, \underline{u}, \nabla \underline{u}) - f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) \right) ,$$

wobei  $\nu_{\Gamma_-}$  die Normale in Richtung  $\Omega_0$  und  $u$  die Randwerte von  $\Omega_0$  her seien. Es folgt

$$\nu_{\Gamma_-} \cdot \left( f_{,p}(\cdot, \underline{u}, \nabla \underline{u}) - f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) \right) \geq 0 \quad \text{auf } \Gamma_- .$$

Da  $u - \underline{u} > 0$  in  $\Omega_0$  mit Randwerten 0 auf  $\Gamma_-$ , ist  $\nabla(u - \underline{u})$  ein nichtnegatives Vielfaches von  $\nu_{\Gamma_-}$ , also

$$0 \geq (\nabla u - \nabla \underline{u}) \cdot \left( f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) - f_{,p}(\cdot, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \right) \quad \text{auf } \Gamma_- .$$

Ist  $f_{,p}$  strikt konvex, d.h.

$$(p_1 - p_2) \cdot \left( f_{,p}(x, z, p_1) - f_{,p}(x, z, p_2) \right) > 0 \quad \text{für } p_1 \neq p_2 ,$$

so folgt  $\nabla u = \nabla \underline{u}$  auf  $\Gamma_-$ , was (1.6.3) beweist.  $\square$

**1.7 Minimumprobleme mit Lipschitz-stetigem Integranden.** Wir betrachten das Hindernisproblem in 1.5 für das Funktional

$$E(u) := \int_{\Omega} (f(\cdot, u, \nabla u) + g(\cdot, u))$$

mit  $f$  wie in 1.5. Mit glatten Funktionen  $g_i : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gelte

$$g(x, z) = \begin{cases} g_1(x, z) & \text{für } z \geq \underline{u}(x) , \\ g_2(x, z) & \text{für } z \leq \underline{u}(x) . \end{cases}$$

Analog zu 1.4 wollen wir den Zusammenhang zwischen einem Sprung in  $g_{,z}$  und Unstetigkeit von  $D^2 u$  für ein absolutes Minimum  $u$  von  $E$  herstellen. Wir nehmen an, daß  $\underline{u} \in C^2(\Omega)$  und definieren

$$\begin{aligned} \lambda &:= g_{1,z}(\cdot, \underline{u}) + L(\underline{u}) \\ &= (g_{1,z}(\cdot, \underline{u}) - g_{2,z}(\cdot, \underline{u})) + (L(\underline{u}) + g_{2,z}(\cdot, \underline{u})) , \end{aligned}$$

wobei  $L$  der zu  $f$  gehörende Operator in 1.5 sei. Unter den Voraussetzungen in 1.6 gilt dann:

(1.7.1) Ist  $\lambda(x) > 0$  mit  $x \in \Gamma_-$ , so kann  $D^2u$  in  $x$  nicht stetig sein.

(1.7.2) Ist  $u \in C^2(\overline{\Omega}_0)$  und  $\Gamma_-$  von der Klasse  $C^2$ , so kann, wenn  $\lambda(x) < 0$ , der Punkt  $x$  nicht auf dem freien Rand  $\Gamma_-$  liegen.

*Beweis.* Zunächst sei bemerkt, daß für das obige Funktional der Beweis von 1.6 ohne Änderungen durchgeführt werden kann, d.h. es folgt, daß  $\nabla u \in C^0(\Omega)$  und

$$L(u) + g_{1,z}(\cdot, u) = 0 \quad \text{in } \Omega_0 .$$

Sei  $x \in \Gamma_-$ . Falls  $D^2u$  in  $x$  stetig ist, so muß  $u$  in  $x$  mit Ableitungen bis zur Ordnung 2 mit  $\underline{u}$  übereinstimmen, also ist  $L(u)(x) = L(\underline{u})(x)$ . Außerdem gilt dann  $L(u)(x) = -g_{1,z}(x, \underline{u}(x))$ . Es folgt

$$0 = (L(u) - L(\underline{u}))(x) = -(g_{1,z}(x, \underline{u}(x)) + L(\underline{u})(x)) = -\lambda(x) ,$$

was (1.7.1) beweist. Zum Beweis von (1.7.2) schreiben wir  $L(u) = L_0u$  mit linearem Differentialoperator

$$L_0v := - \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} v - \sum_i b_i \partial_i v - c$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{ij} &:= f_{,p_i p_j}(\cdot, u, \nabla u) , \\ b_i &:= f_{,p_i z}(\cdot, u, \nabla u) , \\ c &:= -f_{,z}(\cdot, u, \nabla u) + \sum_i f_{,p_i x_i}(\cdot, u, \nabla u) . \end{aligned}$$

Da  $u(x) = \underline{u}(x)$  und  $\nabla u(x) = \nabla \underline{u}(x)$  nach 1.6, ist  $L_0 \underline{u}(x) = L(\underline{u})(x)$ . Falls  $u \in C^2(\overline{\Omega}_0)$  folgt dann

$$L_0(u - \underline{u})(x) = -(g_{1,z}(x, \underline{u}(x)) + L_0 \underline{u}(x)) = -\lambda(x) > 0 ,$$

falls  $\lambda(x) < 0$ . Dann ist  $L_0(u - \underline{u}) > 0$  in  $\Omega_0$  in einer Umgebung von  $x$ . Da  $u - \underline{u} > 0$  in  $\Omega_0$  und  $\Gamma_-$  nahe  $x$  von der Klasse  $C^2$  ist, folgt dann nach dem Hopf-Prinzip, daß  $\nu_{\Gamma_-} \cdot \nabla(u - \underline{u})$  im Punkte  $x$  positiv ist, d.h.  $\nabla u(x) \neq \nabla \underline{u}(x)$ , ein Widerspruch.  $\square$

**1.8 Minimumprobleme mit unstetigem Integranden.** Es sei nun

$$E(u) := \int_{\Omega} (f(\cdot, u, \nabla u) + g(\cdot, u))$$

mit glattem  $f$  wie in 1.5. Die Strukturvoraussetzungen an den Integranden seien:

$$p \mapsto f(x, z, p) \quad \text{ist konvex,}$$

$$z \mapsto g(x, z) \quad \text{ist unterhalbstetig.}$$

Wir betrachten den Fall einer einzigen Unstetigkeitsstelle von  $g$ , d.h. mit glatten Funktionen  $g_i : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei

$$g(x, z) = \begin{cases} g_1(x, z) & \text{für } z > 0, \\ g_2(x, z) & \text{für } z < 0, \end{cases}$$

so daß also  $g(x, 0+) = g_1(x, 0)$  und  $g(x, 0-) = g_2(x, 0)$  existieren. Wegen der Unterhalbstetigkeit von  $g$  muß dann gelten

$$g(x, 0) \leq \min(g(x, 0+), g(x, 0-)) .$$

Wir können nachträglich  $f$  so normieren, daß

$$f(x, z, 0) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, z \in \mathbb{R} .$$

Der wesentliche Unterschied zu 1.7 besteht darin, daß wir Variationen nicht wie dort berechnen können, da  $E$  nicht einmal stetig ist, falls  $g$  unstetig ist. Denn ist  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$  nichtnegativ und nichttrivial, so ist dann  $\alpha \mapsto E(\alpha\eta)$  in 0 unstetig.

Sei nun  $u \in C^0(\Omega)$  ein absolutes Minimum von  $E$  auf einer Menge  $M$ , so daß alle Störungen  $u + \zeta$  mit  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$  in  $M$  liegen. Wir betrachten wieder die Zerlegung

$$\Omega_1 := \{u > 0\} , \quad \Omega_2 := \{u < 0\} , \quad \Gamma := \Omega \cap \{u = 0\} .$$

Im Falle daß  $g(\cdot, 0) = \min(g(\cdot, 0+), g(\cdot, 0-))$  kann dabei  $\Gamma$  (siehe 1.9) ein Inneres besitzen, d.h. es können freie Ränder zwischen den Phasen  $\{u > 0\}$  bzw.  $\{u < 0\}$  und der Nullphase  $\{u = 0\}$  auftreten. Wir definieren daher

$$\Gamma_1 := \partial\{u > 0\} , \quad \Gamma_2 := \partial\{u < 0\} .$$

Die Differentialgleichungen für  $u_i := u$  in  $\Omega_i$  folgen wie in 1.5, wobei wir den Differentialoperator  $L$  zu  $f$  wie dort definieren.

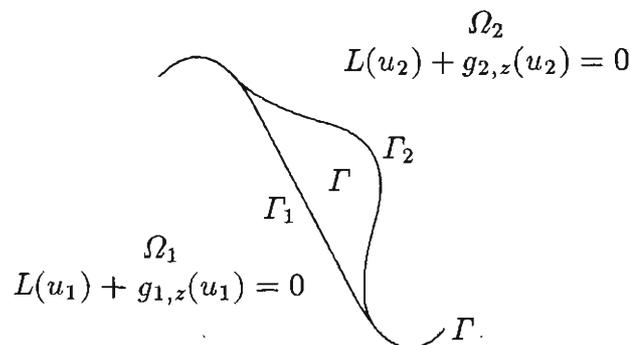


Bild 1.4: Mögliche Phasen für Minimumprobleme mit freiem Rand

An den freien Rändern gilt, falls  $u_i \in C^2(\overline{\Omega}_i)$  und  $D \subset\subset \Omega$ :

(1.8.1) Ist  $\Gamma \cap D$  eine Hyperfläche der Klasse  $C^2$ , so gilt

$$\begin{aligned} & \nabla u_1 \cdot f_{,p}(\cdot, 0, \nabla u_1) - (f(\cdot, 0, \nabla u_1) + g_1(\cdot, 0)) \\ & = \nabla u_2 \cdot f_{,p}(\cdot, 0, \nabla u_2) - (f(\cdot, 0, \nabla u_2) + g_2(\cdot, 0)) \quad \text{auf } D \cap \Gamma . \end{aligned}$$

(1.8.2) Ist  $\Gamma_i \cap D$  eine Hyperfläche der Klasse  $C^2$  und gilt  $\pm u \geq 0$  in  $D$  (d.h.  $u \geq 0$  für  $i = 1$ ,  $u \leq 0$  für  $i = 2$ ), so folgt

$$\nabla u_i \cdot f_{,p}(\cdot, 0, \nabla u_i) - (f(\cdot, 0, \nabla u_i) + g_i(\cdot, 0)) = -g(\cdot, 0) \quad \text{auf } \Gamma_i \cap D .$$

1. *Beweis.* Für diesen Beweis setzen wir voraus, daß  $\nabla u_i \neq 0$  auf  $D \cap \Gamma$  im Falle (1.8.1) und auf  $D \cap \Gamma_i$  im Falle (1.8.2). Dann ist es möglich, erste Variationen des Funktionals

$$E_+(v) := \int_{D \cap \{v > 0\}} f_1(\cdot, v, \nabla v) ,$$

zu berechnen, wobei

$$f_1(x, z, p) := f(x, z, p) + g_1(x, z) - g(x, 0) .$$

Für  $\zeta \in C_0^\infty(D)$  sei  $u_\varepsilon := u + \varepsilon \zeta$  für kleines  $|\varepsilon|$ . Dann hat  $\Gamma_\varepsilon := D \cap \partial\{u_\varepsilon > 0\}$  die Darstellung

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ x_\varepsilon = x + \varepsilon \eta_\varepsilon(x) \nu(x) ; x \in \Gamma_0 \right\} ,$$

wobei  $\nu(x)$  die äußere Normale an  $\partial\{u > 0\}$  in  $x$  bezeichnet.

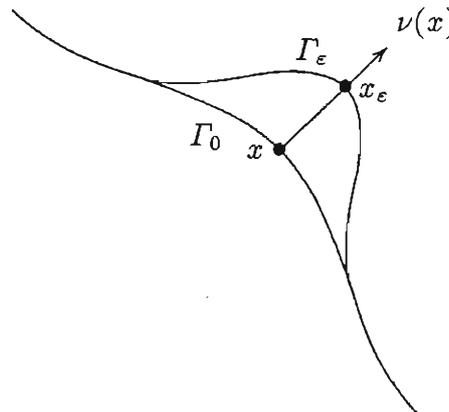


Bild 1.5: Variation des freien Randes

Da  $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = 0$  und  $u(x) = 0$ , folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (u + \varepsilon \zeta)(x + \varepsilon \eta_\varepsilon(x) \nu(x)) \\ &= \zeta(x) + \eta(x) \nu(x) \cdot \nabla u(x) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

wobei  $\eta := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_\varepsilon$ . Dies bedeutet, daß bei gegebenem  $\eta$  die Randwerte der Störungsrichtung  $\zeta$  bestimmt sind durch

$$\zeta + \eta \nu \cdot \nabla u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 .$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \partial_\zeta E_+(u) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} E(u_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{D \cap \{u > 0\}} \left. \frac{d}{d\varepsilon} f_1(\cdot, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} + \int_{D \cap \partial\{u > 0\}} \eta f_1(\cdot, u, \nabla u) d\mathcal{H}^{n-1} . \end{aligned}$$

Das erste Integral ist

$$\begin{aligned} &= \int_{D \cap \{u > 0\}} \left( \nabla \zeta \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) + \zeta f_{1,z}(\cdot, u) \right) \\ &= \int_{D \cap \{u > 0\}} \zeta \left( L(u) + g_{1,z}(\cdot, u) \right) + \int_{D \cap \partial\{u > 0\}} \zeta \nu \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) d\mathcal{H}^{n-1} , \end{aligned}$$

wobei hier das Gebietsintegral wegen der Differentialgleichung in  $\Omega_1$  verschwindet. Also gilt

$$0 = \int_{\Gamma_0} \left( \eta f_1(\cdot, 0, \nabla u) + \zeta \nu \cdot f_{,p}(\cdot, 0, \nabla u) \right) d\mathcal{H}^{n-1} .$$

Unter Ausnutzung der Beziehung zwischen  $\zeta$  und  $\eta$ , und da  $\nabla u = \nabla u \cdot \nu \nu$  auf  $\Gamma_0$ , erhalten wir

$$\zeta \nu = -\eta \nabla u \cdot \nu \nu = -\eta \nabla u \quad \text{auf } \Gamma_0 .$$

Damit ist gezeigt:

$$\partial_\zeta E_+(u) = \int_{\Gamma_0} \eta \left( -\nabla u \cdot f_{,p}(\cdot, 0, \nabla u) + f_1(\cdot, 0, \nabla u) \right) d\mathcal{H}^{n-1} .$$

Entsprechendes gilt für das  $D \cap \{u < 0\}$  abdeckende Funktional  $E_-$ . Dann folgt (1.8.1) wegen  $\partial_\zeta (E_+ + E_-)(u) = 0$  und (1.8.2) wegen  $\partial_\zeta E_\pm(u) = 0$ . Beachte dabei, daß bei der Definition von  $E_\pm(v)$  durch Subtraktion von  $g(\cdot, 0)$  das Funktional  $E(v)$  so normiert wurde, daß der Integrand auf  $\{v = 0\}$  verschwindet.

2. *Beweis.* Wir berechnen die erste Variation von  $E_+$  mit Hilfe von Variablentransformationen, d.h. es sei

$$u_\varepsilon(x) := u(\tau_\varepsilon^{-1}(x)) \quad \text{mit} \quad \tau_\varepsilon(x) := x + \varepsilon\eta(x),$$

wobei  $\eta \in C_0^\infty(D)$ . Zunächst finden wir

$$\begin{aligned} E_+(u_\varepsilon) &= \int_{D \cap \{u_\varepsilon > 0\}} f_1(\cdot, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \\ &= \int_{D \cap \{u > 0\}} f_1(\tau_\varepsilon, u, \nabla u (D\tau_\varepsilon)^{-1}) |\det D\tau_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Wir entwickeln die entstandenen Terme nach  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \det D\tau_\varepsilon &= 1 + \varepsilon \nabla \cdot \eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ (D\tau_\varepsilon)^{-1} &= \text{Id} - \varepsilon D\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} f_1(\tau_\varepsilon, u, \nabla u (D\tau_\varepsilon)^{-1}) &= f_1(\cdot, u, \nabla u) + \varepsilon f_{1,x}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \eta \\ &\quad - \varepsilon f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) \cdot (\nabla u D\eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (E_+(u_\varepsilon) - E_+(u)) &= - \int_{D \cap \{u > 0\}} \sum_i \partial_i u f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \nabla \eta_i \\ &\quad + \int_{D \cap \{u > 0\}} (f_{1,x}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \eta + f_1(\cdot, u, \nabla u) \nabla \cdot \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Mit partieller Integration ist dies

$$\begin{aligned} &= - \int_{\Gamma_0} (\nabla u \cdot \eta) \nu \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Gamma_0} (\nu \cdot \eta) f_1(\cdot, u, \nabla u) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_{D \cap \{u > 0\}} \sum_i \eta_i \nabla \cdot (\partial_i u f_{,p}(\cdot, u, \nabla u)) \\ &\quad + \int_{D \cap \{u > 0\}} (f_{1,x}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \eta - \sum_i \eta_i \partial_i f_1(\cdot, u, \nabla u)) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Die Integranden der Gebietsintegrale summieren sich auf zu

$$\sum_i \eta_i \partial_i u (\nabla \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) - f_{1,z}(\cdot, u, \nabla u)) = 0,$$

und wegen  $\nabla u = \nabla u \cdot \nu \nu$  ergeben die Integranden der Randintegrale

$$\nu \cdot \eta (-\nabla u \cdot f_{,p}(\cdot, u, \nabla u) + f_1(\cdot, u, \nabla u)).$$

Dies ergibt die Behauptung wie im 1. Beweis.  $\square$

**1.9 Beispiel.** Mit  $\Omega = ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$  betrachten wir als einfaches Beispiel zu 1.8 das Funktional

$$E(u) := \int_0^1 \left( |u'|^2 + \lambda_+ \chi_{\{u>0\}} + \lambda_- \chi_{\{u<0\}} \right)$$

auf der Menge

$$M := \{v \in H^{1,2}(\Omega) ; v(0) = u_+ \text{ und } v(1) = -u_-\}$$

mit Zahlen  $\lambda_{\pm} \geq 0$ ,  $u_{\pm} \geq 0$ . Jedes absolute Minimum erfüllt dann  $u'' = 0$  in  $\{u \neq 0\}$ . Wegen der Vorzeichen der Randwerte muß dann  $u' \leq 0$  sein, und es gibt  $l_{\pm} \geq 0$  mit  $l_+ + l_- \leq 1$ , so daß

$$u(x) = \begin{cases} u_+ \left(1 - \frac{x}{l_+}\right) & \text{für } 0 \leq x < l_+, \text{ falls } l_+ > 0, \\ 0 & \text{für } l_+ \leq x \leq 1 - l_-, \\ -u_- \left(1 - \frac{1-x}{l_-}\right) & \text{für } 1 - l_- < x \leq 1, \text{ falls } l_- > 0. \end{cases}$$

Die Bedingungen am freien Rand ergeben sich dann, je nachdem ob zwei oder drei Phasen vorliegen, aus dem Formeln in 1.8. Falls  $0 < l := l_+ = 1 - l_- < 1$  gilt gemäß (1.8.1)

$$(1.9.1) \quad \frac{u_+}{l^2} - \lambda_+^2 = \frac{u_-^2}{(1-l)^2} - \lambda_-^2,$$

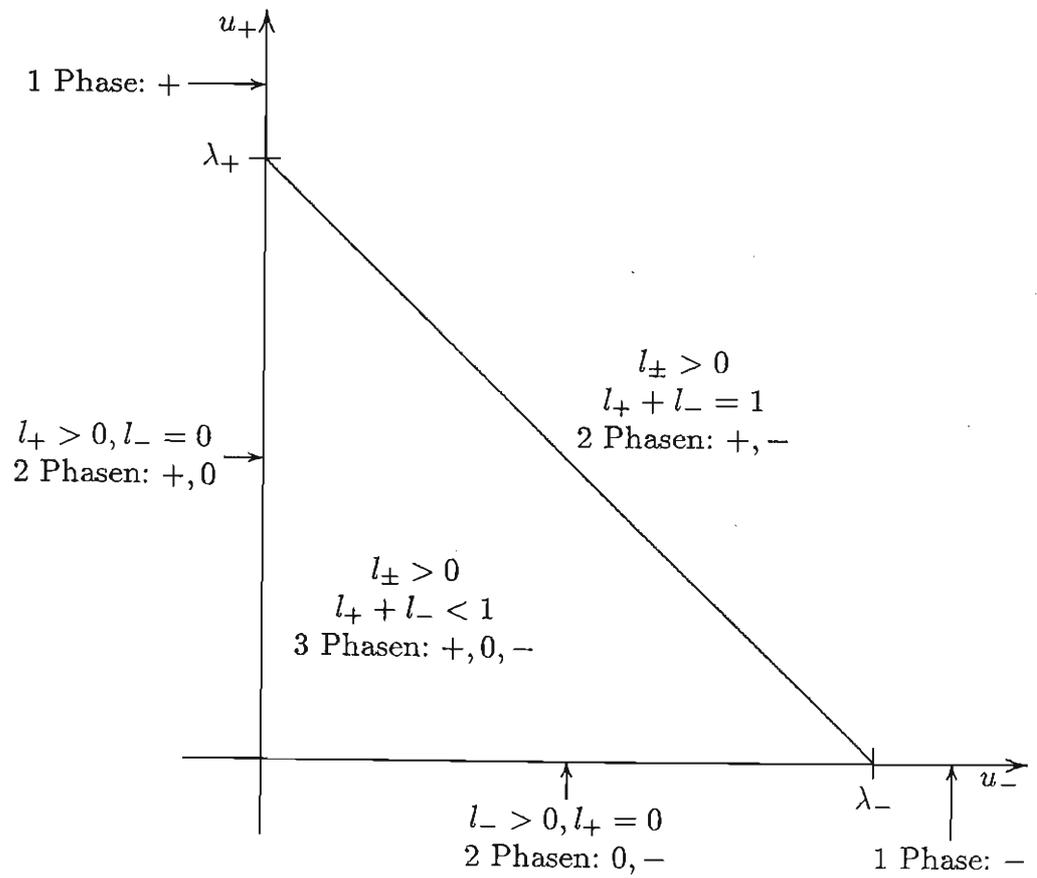
und falls  $0 < l_+ < 1 - l_- < 1$  gemäß (1.8.2)

$$(1.9.2) \quad \frac{u_+}{l_+} = \lambda_+ \quad , \quad \frac{u_-}{l_-} = \lambda_- .$$

Durch Nachrechnen erhält man, daß die letzte Lösung für

$$(1.9.3) \quad \frac{u_+}{\lambda_+} + \frac{u_-}{\lambda_-} \leq 1$$

existiert und dann auch absolutes Minimum ist, während die Lösung in (1.9.1) für alle  $u_{\pm} > 0$  existiert, aber nur absolutes Minimum ist, wenn die umgekehrte Ungleichung in (1.9.3) gilt.

Bild 1.6: Absolutes Minimum in Abhängigkeit von  $u_{\pm}$ .



## 2 Variationsungleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Probleme mit freiem Rand, die sich mit Hilfe der Theorie der monotonen Operatoren lösen lassen. Enthalten sind darin Variationsprobleme, wie zum Beispiel das Hindernisproblem in 1.5 (siehe 2.12). Für die allgemeine abstrakte Formulierung verwenden wir folgende Notationen:

**2.0 Voraussetzungen.** In diesem Abschnitt sei  $V$  immer ein Banachraum und  $M \subset V$  eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Den Dualraum zu  $V$  bezeichnen wir mit  $V^*$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sei das Dualitätsprodukt auf  $V \times V^*$ .

Ist  $u \in M$  ein absolutes Minimum eines gegebenen Funktionals  $E : M \rightarrow \mathbb{R}$ , und ist  $E$  Fréchet-differenzierbar, so lautet die zugehörige Variationsungleichung (vgl. 1.5)

$$\langle u - v, DE(x) \rangle = \partial_{v-u} E(u) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Wir ersetzen nun die Abbildung  $DE : M \rightarrow V^*$  durch die allgemeinere Situation einer beliebigen Abbildung  $F : M \rightarrow V^*$  und fragen nach der Existenz eines Punktes  $u \in M$  mit

$$\langle u - v, F(u) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Wir sagen  $F$  ist von Variationsstruktur, falls  $F = DE$  für eine Abbildung  $E : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir beweisen den folgenden abstrakten Existenzsatz:

**2.1 Existenzsatz.** Es sei  $V$  ein separabler, reflexiver Banachraum,  $M \subset V$  konvex, abgeschlossen und nichtleer und  $F : M \rightarrow V^*$  habe die folgenden Eigenschaften:

(2.1.1)  $F$  sei beschränkt auf beschränkten Teilmengen von  $M$ .

(2.1.2)  $F$  sei koerziv bezüglich eines Punktes  $u_0 \in M$ , d.h. es gilt

$$\frac{\langle u - u_0, F(u) \rangle}{\|u - u_0\|} \rightarrow \infty \quad \text{für } u \in M \text{ mit } \|u\| \rightarrow \infty.$$

(2.1.3)  $F$  erfülle die folgende Stetigkeitsbedingung für  $u \in M$ ,  $u^* \in V^*$  und jede Folge  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $M$ :

$$\left. \begin{array}{l} u_m \rightarrow u \text{ schwach in } V \\ F(u_m) \rightarrow u^* \text{ schwach* in } V^* \\ \limsup_{m \rightarrow \infty} \langle u_m, F(u_m) \rangle \leq \langle u, u^* \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \langle u - v, F(u) - u^* \rangle \leq 0 \text{ für alle } v \in M \\ \text{und} \\ \limsup_{m \rightarrow \infty} \langle u_m, F(u_m) \rangle = \langle u, u^* \rangle. \end{array} \right.$$

Dann existiert eine Lösung  $u \in M$  der Variationsungleichung

$$\langle u - v, F(u) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

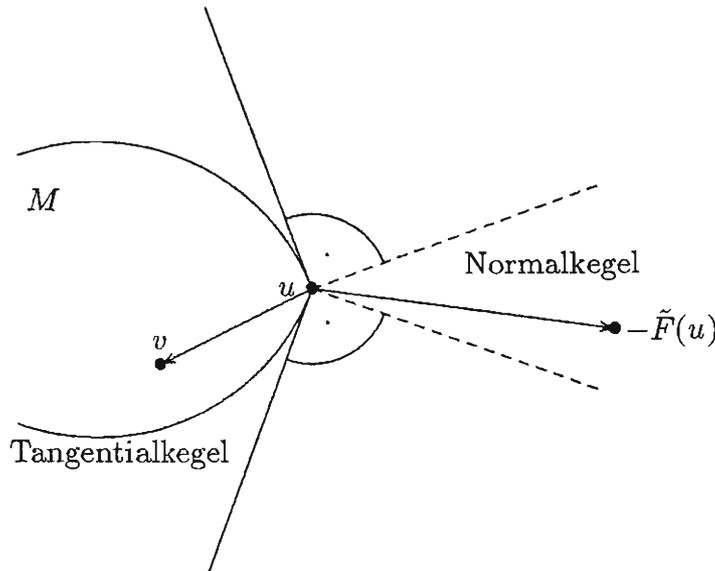


Bild 2.1: Variationsungleichung im Hilbertraumfall

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch eine Galerkin-Approximation des Raumes  $V$ .

(1) Wir nehmen zunächst an, daß  $V$  endlich dimensional ist. Sei dann  $(\cdot, \cdot)_V$  irgendein Skalarprodukt auf  $V$  und  $J : V^* \rightarrow V$  der zugehörige Isomorphismus aus dem Riesz'schen Darstellungssatz, d.h. die Abbildung  $\tilde{F} := J \circ F : M \rightarrow V$  erfüllt

$$\langle v, F(u) \rangle = (v, \tilde{F}(u))_V \quad \text{für alle } u \in M, v \in V.$$

Da  $V$  endlich dimensional ist und  $M$  konvex, gibt es einen eindeutig bestimmten affinen Unterraum  $W \subset V$ , so daß

$$\overset{\circ}{M} \neq \emptyset \quad \text{relativ in } W.$$

Zunächst nehmen wir an, daß  $M$  beschränkt ist und daß  $F$  in einer Umgebung von  $M$  (relativ in  $W$ ) definiert ist und in dieser Umgebung die Bedingungen (2.1.1) und (2.1.3) erfülle.

Das Ziel ist es eine Fixpunktargumentation auf die Abbildung  $\text{Id} - \tilde{F}$  anzuwenden. Da diese Abbildung jedoch nicht nach  $M$  und im allgemeinen auch nicht nach  $W$  abbildet, betrachten wir die (bzgl. des gewählten Skalarproduktes) orthogonale Projektion  $P : V \rightarrow M$ . Diese Projektion ist vollständig charakterisiert durch die Bedingung

$$(v - P(u), u - P(u))_V \leq 0 \quad \text{für alle } u \in V, v \in M.$$

Wir beweisen nun, daß die Abbildung

$$G := P \circ (\text{Id} - \tilde{F}) : M \rightarrow M .$$

stetig ist. Denn sind  $u_m, u \in M$  mit  $u_m \rightarrow u$  für  $m \rightarrow \infty$ , dann sind  $\tilde{F}(u_m)$  nach (2.1.1) beschränkt. Da  $V$  endlich dimensional ist, gibt es somit ein  $\tilde{u} \in V$ , so daß  $\tilde{F}(u_m) \rightarrow \tilde{u}$  stark in  $V$  für eine Teilfolge  $m \rightarrow \infty$ . Folglich gilt auch  $(u_m, \tilde{F}(u_m))_V \rightarrow (u, \tilde{u})_V$  und die Stetigkeitsbedingung (2.1.3) liefert

$$(u - v, \tilde{F}(u) - \tilde{u})_V \leq 0$$

für alle  $v$  in einer Umgebung von  $M$  (nach obiger Voraussetzung), insbesondere für alle  $v$  in einer Umgebung von  $u$ . Daher folgt

$$(u - v, \tilde{F}(u) - \tilde{u})_V = 0 \quad \text{für alle } v \in W ,$$

d.h.  $\tilde{F}(u) - \tilde{u}$  steht senkrecht auf  $W$ . Da  $P$  auf Normalenrichtungen an  $W$  konstant ist, was aus der Charakterisierung von  $P$  folgt, erhalten wir

$$P(u - \tilde{F}(u)) = P(u - \tilde{u}) .$$

Da  $P$  stetig (sogar Lipschitz-stetig) ist, folgt

$$G(u) = P(u - \tilde{F}(u)) = P(u - \tilde{u}) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(u_m - \tilde{F}(u_m)) = \lim_{m \rightarrow \infty} G(u_m) ,$$

was die Stetigkeit von  $G$  beweist. Daher können wir den Brouwer'schen Fixpunktsatz auf  $G$  anwenden und erhalten die Existenz eines Elementes  $u \in M$  mit

$$P(u - \tilde{F}(u)) = u .$$

Setze  $w := u - \tilde{F}(u)$ . Dann gilt für  $v \in M$

$$\begin{aligned} 0 &\geq (v - P(w), w - P(w))_V = (v - u, w - u)_V \\ &= (u - v, \tilde{F}(u))_V = \langle u - v, F(u) \rangle , \end{aligned}$$

d.h.,  $u$  ist Lösung der Variationsungleichung.

(2) Wir lösen uns nun von der Voraussetzung, daß  $F$  in einer Umgebung von  $M$  definiert ist. Für kleines  $\delta$  definiere

$$M_\delta := \{x \in V; B_\delta(x) \cap W \subset M\} .$$

Offensichtlich ist  $M_\delta$  eine abgeschlossene, konvexe Menge, und da  $F$  in der  $\delta$ -Umgebung (relativ in  $W$ ) von  $M_\delta$  definiert ist, gibt es nach (1) einen Punkt  $u_\delta \in M_\delta$  mit

$$\langle u_\delta - v, F(u_\delta) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M_\delta .$$

Da  $M$  beschränkt ist, sind  $u_\delta$  und nach (2.1.1) auch  $F(u_\delta)$  beschränkt. Da  $V$  endlich dimensional ist, gibt es daher  $u \in V$  und  $u^* \in V^*$ , so daß für eine Teilfolge  $\delta \rightarrow 0$

$$u_\delta \rightarrow u \quad \text{stark in } V , \quad F(u_\delta) \rightarrow u^* \quad \text{stark in } V^* .$$

Da  $M$  abgeschlossen ist, muß  $u \in M$  sein, und die Stetigkeitsbedingung (2.1.3) liefert

$$\langle u - v, F(u) - u^* \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Dann folgt für  $v \in M_{\delta_0}$  und  $\delta_0 \geq \delta \rightarrow 0$

$$0 \geq \langle u_\delta - v, F(u_\delta) \rangle \rightarrow \langle u - v, u^* \rangle \geq \langle u - v, F(u) \rangle .$$

Da

$$M = \overline{\bigcup_{\delta_0 > 0} M_{\delta_0}}$$

folgt dann, daß

$$0 \geq \langle u - v, F(u) \rangle \quad \text{für alle } v \in M,$$

d.h.  $u$  ist Lösung der Variationsungleichung.

(3) Nun sei  $M$  unbeschränkt, aber nach wie vor  $V$  endlich dimensional. Wir können dann (2) anwenden auf die Mengen

$$M_R := M \cap B_R(u_0) \quad \text{für großes } R > 0,$$

d.h. es gibt  $u_R \in M_R$  mit

$$\langle u_R - v, F(u_R) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M_R.$$

Setzen wir  $v = u_0$ , so erhalten wir aus der Koerzivität (2.1.2), daß

$$\|u_R - u_0\| \leq C$$

mit einer von  $R$  unabhängigen Konstanten  $C$ . Es folgt dann, daß  $u_R$  für  $R > C$  die Variationsungleichung löst. Denn zu gegebenen  $v \in M$  ist dann für kleines  $\varepsilon > 0$

$$v_\varepsilon := (1 - \varepsilon)u_R + \varepsilon v \in B_{R-C}(u_R) \cap M \subset B_R(u_0) \cap M = M_R ,$$

somit

$$0 \geq \langle u_R - v_\varepsilon, F(u_R) \rangle = \varepsilon \langle u_R - v, F(u_R) \rangle ,$$

also

$$0 \geq \langle u_R - v, F(u_R) \rangle .$$

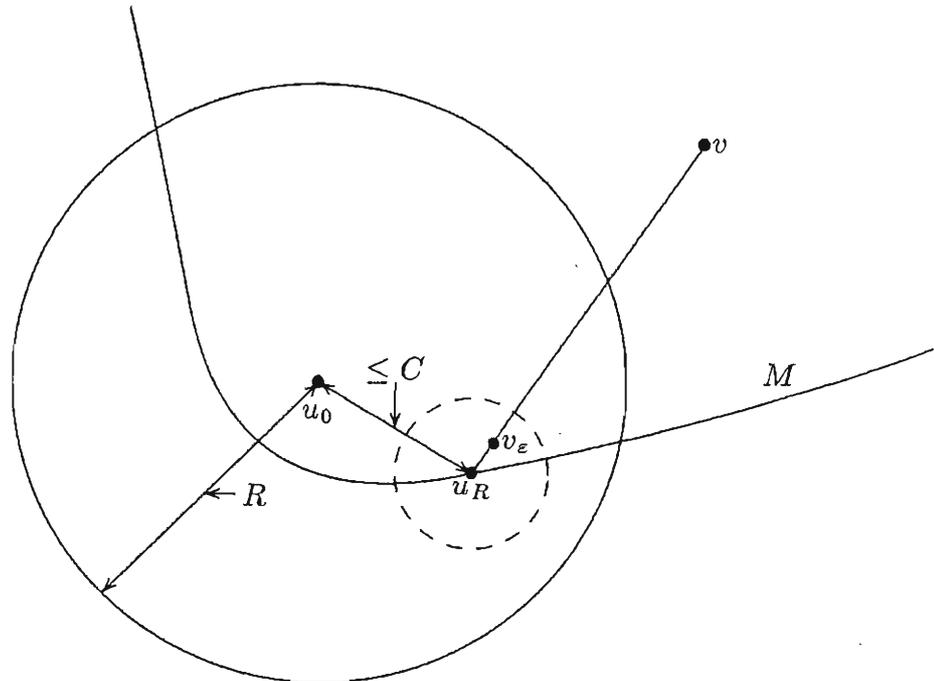


Bild 2.2: Zum Beweisteil (3) von Satz 2.1.

Wir sehen also, daß wegen der vorausgesetzten Koerzivität eine Grenzbe-  
trachtung für  $R \rightarrow \infty$  nicht erforderlich ist. In anderen Worten, falls die  
Variationsungleichung auf  $M$  eine eindeutige Lösung  $u$  besitzt, so gilt  $u_R = u$   
für große  $R$ .

(4) Für beliebiges  $V$  benutzen wir eine Galerkin-Approximation. Da  $V$  und  
damit  $M$  separabel ist, gibt es eine aufsteigende Folge von endlich dimension-  
alen Unterräumen

$$V_N \subset V \quad , \quad V_N \subset V_{N+1} \quad \text{für alle } N,$$

so daß  $u_0 \in V_N$  und

$$M = \overline{\bigcup_{N \in \mathbb{N}} M_N} \quad , \quad \text{wobei } M_N := M \cap V_N.$$

Wir definieren Abbildungen  $F_N : M_N \rightarrow V_N^*$  durch Restriktion, d.h.

$$\langle v, F_N(u) \rangle := \langle v, F(u) \rangle \quad \text{für } u \in M_N, v \in V_N.$$

Da sich die Voraussetzungen (2.1.1) - (2.1.3) von  $F$  auf  $F_N$  übertragen, gibt  
es nach (3) Lösungen  $u_N \in M_N$  der Variationsungleichung

$$0 \geq \langle u_N - v, F_N(u_N) \rangle = \langle u_N - v, F(u_N) \rangle \quad \text{für alle } v \in M_N.$$

Setzen wir wieder  $v = u_0$ , so erhalten wir erneut aus der Koerzivität von  $F$ ,  
daß die  $u_N$  beschränkt sind. Da  $V$  reflexiv ist, gibt es daher ein  $u \in V$ , so daß

$$u_N \rightarrow u \quad \text{schwach in } V$$

für eine Teilfolge  $N \rightarrow \infty$ . Da  $M$  abgeschlossen und konvex ist, ist  $M$  schwach abgeschlossen, woraus wir  $u \in M$  schließen. Außerdem sind  $F(u_N)$  nach (2.1.1) beschränkt in  $V^*$ . Daher gilt

$$F(u_N) \rightarrow u^* \quad \text{schwach* in } V^*$$

für eine Teilfolge  $N \rightarrow \infty$  und ein  $u^* \in V^*$ . Für  $N \geq N_0$  ist  $M_{N_0} \subset M_N$  und daher folgt aus obiger Variationsungleichung für  $v \in M_{N_0}$

$$\langle u_N, F(u_N) \rangle \leq \langle v, F(u_N) \rangle \rightarrow \langle v, u^* \rangle \quad \text{für } N \rightarrow \infty,$$

also

$$s := \limsup_{N \rightarrow \infty} \langle u_N, F(u_N) \rangle \leq \langle v, u^* \rangle \quad \text{für } v \in M_{N_0}.$$

Setzen wir  $v = u_{N_0}$  so folgt

$$s \leq \langle u_{N_0}, u^* \rangle \rightarrow \langle u, u^* \rangle \quad \text{für } N_0 \rightarrow \infty.$$

Damit ist die Stetigkeitsbedingung (2.1.3) anwendbar und wir erhalten, daß

$$\langle u - v, F(u) \rangle \leq \langle u - v, u^* \rangle \quad \text{für alle } v \in M,$$

sowie daß  $s = \langle u, u^* \rangle$ . Nach obiger Ungleichung ist dann für  $v \in M_{N_0}$

$$\langle u - v, u^* \rangle = s - \langle v, u^* \rangle \leq 0,$$

so daß also

$$\langle u - v, F(u) \rangle \leq 0 \quad \text{für } v \in M_{N_0}.$$

Die Konstruktion der Galerkin-Approximation ergibt dann diese Ungleichung für alle  $v \in M$ . □

**2.2 Bemerkung.** Zur Aussage in 2.1 ist folgendes zu bemerken:

(2.2.1) Für die Koerzivitätsbedingung in (2.1.2) ist es wesentlich, daß der Referenzpunkt  $u_0$  in der konvexen Menge  $M$  liegt. Dies wird deutlich an dem folgenden elementaren Beispiel. Es sei  $V = \mathbb{R}^2$  und  $M = \{x \in \mathbb{R}^2; x_2 = 1\}$ . Ist dann  $F = DE$  mit

$$E(x) = e^{x_1} + e^{-x_1} \cdot (x_2 - 1),$$

so rechnet man leicht nach, daß die Koerzivitätsbedingung für einen Punkt  $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$  genau dann erfüllt ist, wenn  $x_{02} < 1$ , d.h. diese Bedingung ist z.B. für  $x_0 = 0$  erfüllt, aber für keinen Punkt in  $M$ . Satz 2.1 ist also nicht anwendbar und in der Tat gibt es keine Lösung der Variationsungleichung für  $F$  auf  $M$ , denn  $\partial_1 E(x) \neq 0$  für alle  $x \in M$ .

(2.2.2) Im Falle  $M = V$  vereinfacht sich die Aussage in 2.1. In der Stetigkeitsbedingung bedeutet dann die erste Konklusion, daß  $F(u) = u^*$ , und die Variationsungleichung reduziert sich auf die Nullstelleneigenschaft  $F(u) = 0$ . Da in

2.1 zu  $F$  jede Konstante dazuaddiert werden kann, ohne die Voraussetzungen zu verletzen, erhalten wir die folgende Aussage:

(2.2.3) Erfüllt  $F : V \rightarrow V^*$  die Voraussetzungen (2.1.1) - (2.1.3) auf  $V$ , so ist  $F$  surjektiv.

Im folgenden zeigen wir, daß sich der Existenzsatz 2.1 insbesondere auf monotone Operatoren sowie Störungen solcher Operatoren anwenden läßt.

**2.3 Monotone Operatoren.** Eine Abbildung  $A : M \rightarrow V^*$  heißt monotoner Operator, falls gilt:

(2.3.1)  $A$  ist hemistetig, d.h. für  $u, v \in M, w \in V$  ist

$$t \mapsto \langle w, A((1-t)u + tv) \rangle \quad \text{stetig auf } [0, 1].$$

(2.3.2)  $A$  ist monoton, d.h. für  $u, v \in M$  gilt

$$\langle u - v, A(u) - A(v) \rangle \geq 0.$$

Zum Beweis der Stetigkeitsbedingung für monotone Operatoren zunächst:

**2.4 Minty-Lemma.** Ist  $A : M \rightarrow V^*$  ein monotoner Operator, so sind für  $u \in M, u^* \in V^*$  äquivalent:

$$(2.4.1) \quad \langle u - v, A(u) - u^* \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

$$(2.4.2) \quad \langle u - v, A(v) - u^* \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

*Beweis.* (2.4.2) folgt aus (2.4.1) wegen der Monotonieeigenschaft (2.3.2). Gilt (2.4.2), so ersetze dort  $v$  durch  $v_\varepsilon := (1 - \varepsilon)u + \varepsilon v \in M$  für kleines  $\varepsilon > 0$ . Es folgt

$$0 \geq \langle u - v, A(v_\varepsilon) - u^* \rangle \rightarrow \langle u - v, A(u) - u^* \rangle$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$  unter Ausnutzung der Hemistetigkeit (2.3.1). □

**2.5 Lemma.** Für monotone Operatoren  $A : M \rightarrow V^*$  gilt:

(2.5.1)  $A$  erfüllt die Stetigkeitsbedingung (2.1.3) auf  $M$ .

(2.5.2) Sind (2.1.1) und (2.1.2) erfüllt für  $A$  auf  $M$ , so gibt es eine Lösung der Variationsungleichung in 2.1.

*Beweis.* Seien  $u_m, u, u^*$  wie in (2.1.3). Wegen der Monotonie von  $A$  gilt dann für alle  $v \in M$

$$(2.5.3) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \langle u_m - v, A(u_m) - A(v) \rangle \\ &= \langle u_m, A(u_m) \rangle - \langle v, A(u_m) \rangle - \langle u_m - v, A(v) \rangle \end{aligned}$$

In (2.1.3) ist vorausgesetzt, daß

$$\lambda := \langle u, u^* \rangle - \limsup_{m \rightarrow \infty} \langle u_m, A(u_m) \rangle \geq 0 .$$

Da  $u_m \rightarrow u$  und  $A(u_m) \rightarrow u^*$  wie in (2.1.3), erhalten wir aus (2.5.3) für  $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\langle u, u^* \rangle - \lambda) - \langle v, u^* \rangle - \langle u - v, A(v) \rangle \\ &= -\lambda + \langle u - v, u^* - A(v) \rangle . \end{aligned}$$

Setzen wir speziell  $v = u$ , so folgt  $-\lambda \geq 0$ , also  $\lambda = 0$  und daher

$$0 \leq \langle u - v, u^* - A(v) \rangle \quad \text{für alle } v \in M .$$

Nach dem Minty-Lemma können wir  $A(v)$  durch  $A(u)$  ersetzen, womit dann (2.1.3) bewiesen ist.  $\square$

Die Eindeutigkeit der Lösung von Variationsungleichungen für monotone Operatoren läßt sich unter einer strikten Monotoniebedingung zeigen.

**2.6 Strikt monotone Operatoren.** Ein monotoner Operator  $A : M \rightarrow V^*$  heißt strikt monoton, falls

$$\langle u - v, A(u) - A(v) \rangle > 0 \quad \text{für } u, v \in M \text{ mit } u \neq v .$$

Dann gilt:

(2.6.1) Es gibt höchstens eine Lösung der Variationsungleichung in 2.1 für  $A$  auf  $M$ .

(2.6.2) Sind (2.1.1) - (2.1.2) erfüllt, so gibt es eine Abbildung  $B : V^* \rightarrow M$ , so daß  $B(u^*)$  die eindeutige Lösung der Variationsungleichung für  $u \mapsto A(u) - u^*$  auf  $M$  ist. Ist  $M = V$ , so ist  $A : V \rightarrow V^*$  bijektiv und  $B = A^{-1}$ .

*Beweis.* Seien  $u_1, u_2$  Lösungen, d.h. für  $i = 1, 2$

$$0 \geq \langle u_i - v, A(u_i) \rangle \quad \text{für } v \in M .$$

Setze  $v = u_2$  für  $i = 1$  und  $v = u_1$  für  $i = 2$  und erhalte durch Addition

$$0 \geq \langle u_1 - u_2, A(u_1) - A(u_2) \rangle ,$$

woraus wegen der strikten Monotonie  $u_1 = u_2$  folgt. Zum Beweis von (2.6.2) bemerke, daß  $u \mapsto A(u) - u^*$  nach (2.5.1) die Voraussetzungen in 2.1 erfüllt, mit (2.6.1) also genau eine Lösung  $B(u^*)$  der Variationsungleichung besitzt. Ist  $M = V^*$ , so ist diese Lösung durch die Gleichung  $A(B(u^*)) = u^*$  charakterisiert.  $\square$

Das Standardbeispiel eines strikt monotonen Operators ist die durch

$$(2.6.3) \quad \langle \zeta, A(u) \rangle := \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla_p u$$

definierte Abbildung  $A : V \rightarrow V^*$ . Dabei ist  $V := H^{1,p}(\Omega)$  mit einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $1 < p < \infty$ , und der  $p$ -Gradient  $\nabla_p u$  ist definiert durch

$$(2.6.4) \quad \nabla_p u := \begin{cases} |\nabla u|^{p-2} \nabla u & \text{in } \{\nabla u \neq 0\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Beweis der Monotonie des Operators  $A$  auf  $V$  haben wir für  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$  mit  $z_t := (1-t)z_0 + tz_1$  zu berechnen

$$(2.6.5) \quad \begin{aligned} & (z_1 - z_0) \cdot (|z_1|^{p-2} z_1 - |z_0|^{p-2} z_0) \\ &= (z_1 - z_0) \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} (|z_t|^{p-2} z_t) dt \\ &= \int_0^1 |z_t|^{p-2} \left( |z_1 - z_0|^2 + (p-2) \left( (z_1 - z_0) \cdot \frac{z_t}{|z_t|} \right)^2 \right) dt \\ &\geq (1 + \min(0, p-2)) \cdot \int_0^1 |z_t|^{p-2} dt \cdot |z_1 - z_0|^2, \end{aligned}$$

was für  $z_1 \neq z_0$  positiv ist.

In vielen Beispielen ergibt sich die Koerzivität eines monotonen Operators aus einer stärkeren Monotonieeigenschaft.

**2.7 Stark monotone Operatoren.** Ein monotoner Operator  $A : M \rightarrow V^*$  heißt stark monoton, falls es eine monotone Abbildung  $\alpha_0 : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  gibt, die bijektiv ist, so daß

$$\langle u - v, A(u) - A(v) \rangle \geq \alpha_0(\|u - v\|) \|u - v\| \quad \text{für alle } u, v \in M.$$

Ist dann (2.1.1) erfüllt, so existiert die Abbildung  $B : V^* \rightarrow M$  in (2.6.2) und ist gleichmäßig stetig.

*Beweis.* Die starke Monotonie impliziert die Koerzivität (2.1.2), denn für  $u_0$  in  $M$  gilt

$$\frac{\langle u - u_0, A(u) \rangle}{\|u - u_0\|} \geq \alpha_0(\|u - u_0\|) - \|A(u_0)\| \rightarrow \infty \quad \text{für } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Nach 2.6 existiert dann die Abbildung  $B : V^* \rightarrow M$ . Für  $u_1^*, u_2^* \in V^*$  gilt also mit  $u_i := B(u_i^*)$

$$\langle u_i - v, A(u_i) - u_i^* \rangle \leq 0 \quad \text{für } v \in M.$$

Wie im vorigen Beweis folgt daraus

$$\begin{aligned} \langle u_1 - u_2, A(u_1) - u_1^* \rangle &\leq 0, \\ \langle u_2 - u_1, A(u_2) - u_2^* \rangle &\leq 0, \end{aligned}$$

also durch Addition

$$\langle u_1 - u_2, A(u_1) - A(u_2) \rangle \leq \langle u_1 - u_2, u_1^* - u_2^* \rangle .$$

Da die linke Seite nach unten durch  $\alpha_0(\|u_1 - u_2\|)\|u_1 - u_2\|$  abgeschätzt ist, folgt

$$\alpha_0(\|u_1 - u_2\|) \leq \|u_1^* - u_2^*\| ,$$

d.h.

$$\|B(u_1^*) - B(u_2^*)\| \leq \alpha_0^{-1}(\|u_1^* - u_2^*\|) .$$

Da  $\alpha_0^{-1}(t) \searrow 0$  für  $t \searrow 0$ , folgt die Behauptung.  $\square$

Wir verallgemeinern nun die Anwendung des Satzes 2.1 auf, insbesondere kompakte, Störungen eines monotonen Operators.

**2.8 Gestörte monotone Operatoren.** Eine Abbildungen  $F : M \rightarrow V^*$  sei gegeben durch

$$F(u) := A(u, u) \quad \text{mit} \quad A : M \times M \rightarrow V^* .$$

Dabei sei  $A(w, \cdot) : M \rightarrow V^*$  ein monotoner Operator für jedes  $w \in M$ ; und für jedes  $u \in M$  gelte:

(2.8.1)  $A(\cdot, u)$  ist schwach stetig, d.h. für  $w_m, w \in M$  gelte

$$w_m \rightarrow w \quad \text{schwach in } V \Rightarrow A(w_m, u) \rightarrow A(w, u) \quad \text{schwach}^* \text{ in } V^* .$$

(2.8.2)  $\langle \cdot, A(\cdot, u) \rangle$  ist schwach unterhalbstetig, d.h. für  $w_m, w \in M$  gelte

$$w_m \rightarrow w \quad \text{schwach in } V \Rightarrow \langle w, A(w, u) \rangle \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle w_m, A(w_m, u) \rangle .$$

Unter diesen Voraussetzungen erfüllt  $F$  die Stetigkeitsbedingung (2.1.3).

*Beweis.* Analog zum Beweis von 2.5 seien  $u_m, u, u^*$  wie in (2.1.3). Die Monotonie von  $A(u_m, \cdot)$  ergibt für  $v \in M$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle u_m - v, A(u_m, u_m) - A(u_m, v) \rangle \\ &= \langle u_m, F(u_m) \rangle - \langle v, F(u_m) \rangle - \langle u_m, A(u_m, v) \rangle + \langle v, A(u_m, v) \rangle . \end{aligned}$$

Für den ersten Term nutzen wir wieder aus, daß

$$\lambda := \langle u, u^* \rangle - \limsup_{m \rightarrow \infty} \langle u_m, F(u_m) \rangle \geq 0 ,$$

und für den zweiten, daß  $F(u_m) \rightarrow u^*$  schwach\* in  $V^*$ . Unter Verwendung der schwachen Unterhalbstetigkeit in (2.8.2) für den dritten Term und der schwachen Stetigkeit (2.8.1) für den letzten Term folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\langle u, u^* \rangle - \lambda) - \langle v, u^* \rangle - \langle u, A(u, v) \rangle + \langle v, A(u, v) \rangle \\ &= -\lambda + \langle u - v, u^* - A(u, v) \rangle . \end{aligned}$$

Setzen wir  $v = u$ , so folgt wieder  $\lambda = 0$ , und daher

$$0 \leq \langle u - v, u^* - A(u, v) \rangle \quad \text{für alle } v \in M.$$

Die Anwendung des Minty-Lemmas auf  $v \mapsto A(u, v)$  liefert dann

$$0 \leq \langle u - v, u^* - F(u) \rangle \quad \text{für alle } v \in M,$$

d.h. (2.1.3) ist bewiesen. □

Als Spezialfall betrachten wir

**2.9 Kompakte Störungen.** Eine Abbildung  $K : M \rightarrow V^*$  heißt vollstetig, falls für  $u_m, u \in M$  gilt:

$$u_m \rightarrow u \quad \text{schwach in } V \quad \Rightarrow \quad K(u_m) \rightarrow K(u) \quad \text{stark in } V^*.$$

Offensichtlich erfüllt jeder vollstetige Operator  $K : M \rightarrow V^*$  die Bedingungen (2.8.1) und (2.8.2), d.h.  $K$  ist schwach stetig, und  $\langle \cdot, K(\cdot) \rangle$  ist schwach unterhalbstetig.

Wir wenden die bisherige abstrakte Theorie nun an auf

**2.10 Elliptische Differentialoperatoren vom Divergenz-Typ.** Wir betrachten vektorwertige Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet (d.h. eine beschränkte, offene und zusammenhängende Menge) mit Lipschitz-Rand sei. Weiter sei  $1 < p < \infty$  und

$$F : V := H^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow V^*$$

definiert durch

$$F(u) := A(u, u) + K(u),$$

wobei für  $\zeta \in V$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, A(w, u) \rangle &:= \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot a(\cdot, w, \nabla u), \\ \langle \zeta, K(w) \rangle &:= \int_{\Omega} \zeta f(\cdot, w) + \int_{\partial \Omega} \zeta g(\cdot, w) d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Darüberhinaus sei eine Funktion  $u_0 \in V$  gegeben. Die Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen  $a, f, g$ , die gewährleisten, daß

$$A : V \times V \rightarrow V^* \quad \text{und} \quad K : V \rightarrow V^*$$

wohldefiniert sind, sind die folgenden:

(2.10.0) Die Funktionen

$$\begin{aligned} a &: \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^{mn}, \\ f &: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ g &: \partial\Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

sind Carathéodory-Funktionen, was z.B. für  $a$  heißt, daß

$$\begin{aligned} a(\cdot, z_0, z_1) &\text{ meßbar ist für alle } (z_0, z_1) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn}, \\ a(x, \cdot, \cdot) &\text{ stetig ist für alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

(2.10.1) Als Strukturbedingung setzen wir voraus, daß  $a$   $p$ -elliptisch ist, d.h. mit einer Konstanten  $c_0 > 0$  gilt

$$(z_1 - \tilde{z}_1) \cdot (a(x, z_0, z_1) - a(x, z_0, \tilde{z}_1)) \geq c_0 |z_1 - \tilde{z}_1|^p$$

für  $x \in \Omega$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^m$  und  $z_1, \tilde{z}_1 \in \mathbb{R}^{mn}$  und daß  $f$  und  $g$  quasimonoton bezüglich  $u_0$  sind, d.h. zu  $\delta > 0$  gibt es Funktionen  $\varphi_\delta \in L^1(\Omega)$  und  $\psi_\delta \in L^1(\partial\Omega)$ , so daß

$$\begin{aligned} (z - u_0(x))f(x, z) &\geq -\delta |z|^p - \varphi_\delta(x) && \text{für } x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^m, \\ (z - u_0(x))g(x, z) &\geq -\delta |z|^p - \psi_\delta(x) && \text{für } x \in \partial\Omega, z \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

(2.10.2) Als Wachstumsbedingung setzen wir voraus, daß

$$\begin{aligned} |a(x, z_0, z_1)| &\leq C_0 |z_1|^{p-1} + \delta^{\frac{p-1}{p}} |z_0|^{p-1} + \varphi_\delta(x)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\text{für } x \in \Omega, (z_0, z_1) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn}, \\ |f(x, z)| &\leq C_0 |z|^{q-1} + f_0(x)^{\frac{q-1}{q}} && \text{für } x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^m, \\ |g(x, z)| &\leq C_0 |z|^{r-1} + g_0(x)^{\frac{r-1}{r}} && \text{für } x \in \partial\Omega, z \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Dabei ist  $C_0 > 0$ ,  $f_0 \in L^1(\Omega)$ ,  $g_0 \in L^1(\partial\Omega)$ , und wie oben  $\varphi_\delta \in L^1(\Omega)$  für jedes  $\delta > 0$ . Weiter sind  $q, r \in ]1, \infty[$  so gewählt, daß stetige Einbettungen

$$H^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad , \quad H^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\partial\Omega)$$

existieren, d.h. es muß gelten

$$1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q} \quad , \quad 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n-1}{r} .$$

*Beweis.* Es folgt aus (2.10.0), daß  $a(\cdot, w, \nabla u)$ ,  $f(\cdot, w)$  in  $\Omega$  und  $g(\cdot, w)$  auf  $\partial\Omega$  meßbar sind, falls  $w, u \in V$ . Die Integranden in der Definition von  $A$  und  $K$  schätzen wir mit Hilfe von (2.10.2) ab und erhalten mit Hilfe der Sobolev-Einbettungssätze für  $\zeta \in V$

$$\begin{aligned}
|\langle \zeta, A(w, u) \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\nabla \zeta \cdot a(\cdot, w, \nabla u)| \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla \zeta| \left( C_0 |\nabla u|^{p-1} + |w|^{p-1} + \varphi_1^{\frac{p-1}{p}} \right) \\
&\leq C \|\nabla \zeta\|_{L^p(\Omega)} \left( \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + \|w\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + \|\varphi_1\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p-1}{p}} \right) \\
&\leq C \|\zeta\|_V \left( \|u\|_V^{p-1} + \|w\|_V^{p-1} + 1 \right),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\langle \zeta, K(w) \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\zeta| \cdot |f(\cdot, w)| + \int_{\partial\Omega} |\zeta| \cdot |g(\cdot, w)| d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \int_{\Omega} |\zeta| \left( C_0 |w|^{q-1} + f_0^{\frac{q-1}{q}} \right) + \int_{\partial\Omega} |\zeta| \left( C_0 |w|^{r-1} + g_0^{\frac{r-1}{r}} \right) d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq C \|\zeta\|_{L^q(\Omega)} \left( \|w\|_{L^q(\Omega)}^{q-1} + \|f_0\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{q-1}{q}} \right) \\
&\quad + C \|\zeta\|_{L^r(\partial\Omega)} \left( \|w\|_{L^r(\partial\Omega)}^{r-1} + \|g_0\|_{L^1(\partial\Omega)}^{\frac{r-1}{r}} \right) \\
&\leq C \|\zeta\|_V \left( \|w\|_V^{q-1} + \|w\|_V^{r-1} + 1 \right),
\end{aligned}$$

insgesamt also mit  $\alpha = \max(p, q, r)$  (in der Regel  $= q$ )

$$|\langle \zeta, F(u) \rangle| \leq C \|\zeta\|_V (\|u\|_V^{\alpha-1} + 1),$$

somit

$$\|F(u)\|_{V^*} \leq C \cdot (\|u\|_V^{\alpha-1} + 1).$$

Diese Abschätzung beweist die Wohldefiniertheit von  $A$  und  $K$  und zeigt außerdem, daß die Eigenschaft (2.1.1) für  $F$  erfüllt ist.  $\square$

Ein Beispiel für den Hauptterm  $A$  in 2.10, für das die Wachstumsbedingung in (2.10.2) erfüllt, ist

$$a(x, z_0, z) := \begin{cases} d(|z|)z & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

wobei  $d : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sei mit

$$0 \leq d(r) \leq \begin{cases} C \cdot r^{p-2} & , \text{ falls } 1 < p < 2, \\ C \cdot (r^{p-2} + 1) & , \text{ falls } p \geq 2. \end{cases}$$

Die Elliptizitätsbedingung in (2.10.1) gilt für  $p \geq 2$ , wenn

$$d(r) + r \min(0, d'(r)) \geq c r^{p-2} \quad \text{für } r > 0$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ . Denn analog zu (2.6.5) ist

$$\begin{aligned} & (z_1 - z_0) \cdot \left( d(|z_1|)z_1 - d(|z_0|)z_0 \right) \\ & \geq \int_0^1 (d(|z_t|) + \min(0, |z_t|d'(|z_t|))) dt \cdot |z_1 - z_0|^2 \\ & \geq c \int_0^1 |z_t|^{p-2} dt \cdot |z_1 - z_0|^2 = c \int_0^1 \left| y_0 + \left( t - \frac{1}{2} \right) y_1 \right|^{p-2} dt \cdot |z_1 - z_0|^p \end{aligned}$$

mit

$$y_0 := \frac{1}{2} \frac{z_1 + z_0}{|z_1 - z_0|} \quad \text{und} \quad y_1 := \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|} ,$$

wobei für  $p \geq 2$  das letzte Integral gleichmäßig in  $y_0$  und  $y_1$  nach unten durch eine positive Konstante abgeschätzt ist. Der zugehörige Differentialoperator ist

$$\nabla \cdot (d(|\nabla u|)\nabla u) .$$

Für das Standardbeispiel in (2.6.3) ist  $d(r) = r^{p-2}$ . Dies führt zum  $p$ -Laplace-Operator

$$(2.10.3) \quad \Delta_p u := \nabla \cdot (\nabla_p u) ,$$

wobei der  $p$ -Gradient wie in (2.6.4) definiert ist.

Wir lösen nun zugehörige Variationsungleichungen mit abstrakt gegebenen Nebenbedingungen.

**2.11 Satz.** Es sei  $F$  wie in 2.10 definiert, und  $M \subset V$  sei abgeschlossen und konvex, es sei  $u_0 \in M$  für die Funktion in 2.10 und es gebe eine Konstante  $C_1 > 0$ , so daß

$$(2.11.1) \quad u_0 + \alpha \in M \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \leq C_1 .$$

Dann erfüllt  $F$  auf  $M$  die Voraussetzungen in Satz 2.1. Es gibt also ein  $u \in M$ , so daß

$$\langle u - v, F(u) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M ,$$

d.h. ausgeschrieben

$$\int_{\Omega} \left( \nabla(v - u) \cdot a(\cdot, u, \nabla u) + (v - u)f(\cdot, u) \right) + \int_{\partial\Omega} (v - u)g(\cdot, u) \mathcal{H}^{n-1} \leq 0 .$$

*Beweis.* Die Eigenschaft (2.1.1) wurde schon in 2.10 bewiesen. Für das weitere führen wir zur Vereinfachung eine Translation um die Funktion  $u_0$  durch, d.h. wir betrachten

$$\tilde{a}(x, z_0, z_1) := a(x, u_0(x) + z_0, \nabla u_0(x) + z_1) ,$$

ebenso  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$ . Diese Funktionen erfüllen die Voraussetzungen in 2.10 bzgl. der Funktion  $\tilde{u}_0 := 0$ . Denn z.B. ist

$$z \cdot \tilde{f}(x, z) = z \cdot f(x, z + u_0(x)) \geq -\delta |z + u_0(x)|^p - \varphi_\delta(x).$$

Wegen der elementaren Ungleichung

$$(\alpha + \beta)^p \leq \lambda^{p-1} \alpha^p + \left( \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)^{p-1} \beta^p \quad \text{für } \alpha, \beta > 0, \lambda > 1,$$

folgt daß

$$z \cdot \tilde{f}(x, z) \geq -2\delta |z|^p - (C|u_0(x)|^p + \varphi_\delta(x)),$$

wobei der Ausdruck in Klammern eine Funktion in  $L^1(\Omega)$  ist.

Dies bedeutet, daß wir die Ausgangskoeffizienten  $a, f, g$  betrachten können unter der Annahme daß  $u_0 = 0$ . Zum Beweis der Koerzivität haben wir

$$\langle u, F(u) \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot a(\cdot, u, \nabla u) + \int_{\Omega} u \cdot f(\cdot, u) + \int_{\partial\Omega} u \cdot g(\cdot, u) d\mathcal{H}^{n-1}$$

nach unten abzuschätzen unter Verwendung der Strukturbedingungen in (2.10.1). Das erste Integral ist unter Verwendung der Elliptizität

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot (a(\cdot, u, \nabla u) - a(\cdot, u, 0)) + \int_{\Omega} \nabla u \cdot a(\cdot, u, 0) \\ &\geq c_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^p - \int_{\Omega} |\nabla u| \left( \delta^{\frac{p-1}{p}} |u|^{p-1} + \varphi_\delta^{\frac{p-1}{p}} \right). \end{aligned}$$

Mit der Young-Ungleichung ist dies

$$\geq \frac{c_0}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - C \int_{\Omega} (\delta |u|^p + \varphi_\delta).$$

Mit Hilfe der Strukturbedingung für  $f, g$  erhalten wir also

$$\langle u, F(u) \rangle \geq \frac{c_0}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - C \int_{\Omega} (\delta |u|^p + \varphi_\delta) - C \int_{\partial\Omega} (\delta |u|^p + \psi_\delta) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Wir nutzen aus, daß auf der Menge  $M$  eine Poincaré-Ungleichung gilt (zum Beweis siehe [A1, 5.15]), d.h. es gibt eine Konstante  $C_2$ , so daß

$$\|v\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C_2 \left( \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p + 1 \right) \quad \text{für alle } v \in M.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle u, F(u) \rangle &\geq \left( \frac{c_0}{2} - C \cdot C_2 \delta \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^p - C(\delta) \\ &\geq \frac{c_0}{4} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - C, \end{aligned}$$

falls  $\delta$  klein genug gewählt wird. Da nach der Poincaré-Ungleichung

$$\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p \geq c\|v\|_{H^{1,p}(\Omega)}^p - 1 ,$$

folgt daraus die Koerzivität von  $F$  bezüglich des Punktes  $0 = u_0 \in M$ . Zur Abhängigkeit der Abschätzung von  $\langle u, F(u) \rangle$  nach unten von den Koeffizientenfunktionen  $a, f, g$  ist zu bemerken, daß nur die Konstanten und Funktionen in den Strukturbedingungen von  $a, f, g$ , sowie in der Wachstumsbedingung von  $a$  eingehen. Des weiteren hing diese Abschätzung im wesentlichen nur von der Poincaré-Konstante auf  $M$  ab.

Die Stetigkeitsbedingung (2.1.3) beweisen wir mit Hilfe von 2.8, d.h. mit der Darstellung

$$F(u) = \tilde{A}(u, u) \quad , \quad \tilde{A}(w, u) := A(w, u) + K(w) .$$

Wie schon gerade benutzt, impliziert die Elliptizität von  $a$  die starke Monotonie von  $A(w, \cdot)$  (vgl. den Beweis von 2.7). Außerdem ist  $A(w, \cdot)$  stetig, mithin auch hemistetig. Denn konvergiert  $u_m \rightarrow u$  in  $V$  für  $m \rightarrow \infty$ , so ist

$$\|A(w, u_m) - A(w, u)\|_{V^*} \leq \|a(\cdot, w, \nabla u_m) - a(\cdot, w, \nabla u)\|_{L^{p^*}(\Omega)} .$$

Für eine Teilfolge konvergiert  $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$  fast überall in  $\Omega$ , somit auch  $a(\cdot, w, \nabla u_m) \rightarrow a(\cdot, w, \nabla u)$ . Da nach der Wachstumsbedingung (2.10.2)

$$|a(\cdot, w, \nabla u_m)|^{p^*} \leq C(|\nabla u_m|^p + |w|^p + \varphi_1) ,$$

und auf der rechten Seite  $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$  in  $L^p(\Omega)$ , folgt nach dem Vitali-Konvergenzsatz, daß  $a(\cdot, w, \nabla u_m) \rightarrow a(\cdot, w, \nabla u)$  in  $L^{p^*}(\Omega)$  und folglich  $A(w, u_m) \rightarrow A(w, u)$  in  $V^*$ , was die Stetigkeit von  $A(w, \cdot)$  beweist.

Es bleibt also zu beweisen, daß  $\tilde{A}(\cdot, u)$  die Eigenschaften (2.8.1), (2.8.2) hat. Dazu zeigen wir für den Anteil  $A(\cdot, u)$  als stärkere Eigenschaft (siehe 2.9) die Vollstetigkeit. Konvergiert  $w_m \rightarrow w$  schwach in  $V$  für  $m \rightarrow \infty$ , so konvergiert nach dem Rellich'schen Einbettungssatz  $w_m \rightarrow w$  stark in  $L^p(\Omega)$ . Wie oben führt dann die Abschätzung

$$|a(\cdot, w_m, \nabla u)|^{p^*} \leq C(|\nabla u|^p + |w_m|^p + \varphi_1)$$

zur starken Konvergenz  $A(w_m, u) \rightarrow A(w, u)$  in  $V^*$ .

Für den Anteil  $K$  gehen wir wieder von einer in  $V$  schwach konvergenten Folge  $w_m \rightarrow w$  aus, die dann wieder stark in  $L^p(\Omega)$  und für eine Teilfolge fast überall in  $\Omega$  konvergiert. Also folgt, daß

$$f(\cdot, w_m) \rightarrow f(\cdot, w) \quad \text{fast überall in } \Omega .$$

Außerdem gilt wegen der Wachstumsbedingung an  $f$ , daß

$$|f(\cdot, w_m)|^{q^*} \leq C(|w_m|^q + f_0) .$$

Da  $w_m$  beschränkt in  $V$  sind, also nach dem Einbettungssatz auch in  $L^q(\Omega)$  (so war  $q$  gewählt), folgt daß  $f(\cdot, w_m)$  in  $L^{q^*}(\Omega)$  beschränkt sind. Da  $1 < q^* < \infty$ , d.h.  $L^{q^*}(\Omega)$  reflexiv ist, konvergiert eine Teilfolge schwach in  $L^{q^*}(\Omega)$ . Wegen obiger punktweiser Konvergenz muß dieser schwache Grenzwert die Funktion  $f(\cdot, w)$  sein. Dies impliziert, daß für alle  $\zeta \in V$  gilt, da dann  $\zeta \in L^q(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \zeta f(\cdot, w_m) \rightarrow \int_{\Omega} \zeta f(\cdot, w) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Entsprechendes folgt für den  $g$ -Term, indem wir die kompakte Einbettung auf  $L^p(\partial\Omega)$  und die stetige Einbettung auf  $L^r(\partial\Omega)$  verwenden. Damit ist gezeigt, daß  $K(w_m) \rightarrow K(w)$  schwach\* in  $V^*$ , d.h.  $K$  erfüllt (2.8.1).

Zum Beweis von (2.8.2) für  $K$  betrachten wir, mit  $w_m, w$  wie gerade, die sich aus der Strukturbedingung ergebenden nichtnegativen Funktionen

$$w_m f(\cdot, w_m) + |w_m|^p + \varphi_1.$$

Nach dem Fatou-Lemma ist

$$\int_{\Omega} (w \cdot f(\cdot, w) + |w|^p + \varphi_1) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (w_m \cdot f(\cdot, w_m) + |w_m|^p + \varphi_1).$$

Nun konvergiert  $|w_m|^p$  gegen  $|w|^p$  in  $L^1(\Omega)$  und wir erhalten als Konsequenz

$$\int_{\Omega} w \cdot f(\cdot, w) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w_m \cdot f(\cdot, w_m).$$

Da wir analog für den  $g$ -Term argumentieren können, folgt die schwache Unterhalbstetigkeit von  $\langle \cdot, K(\cdot) \rangle$ . Zum Schluß sei noch bemerkt, daß für den subkritischen Fall der Exponenten  $q$  und  $r$ , d.h. wenn die zugehörigen Einbettungen kompakt sind, die Vollstetigkeit auch von  $K$  folgt.  $\square$

Meistens wird die Menge  $M$  dazu benutzt, Randwertprobleme zu lösen, d.h. mit einer meßbaren Menge  $\Gamma \subset \partial\Omega$  setzt man

$$M := \{v \in V : v = u_0 \quad \text{fast überall auf } \Gamma\}.$$

Dies definiert einen affinen Unterraum  $M = u_0 + M_0$  mit

$$M_0 := \{v \in V : v = 0 \quad \text{fast überall auf } \Gamma\},$$

und falls  $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) > 0$  so ist (2.11.1) erfüllt mit  $C_1 = 0$ . Die Variationsungleichung in Satz 2.11 wird damit zur Gleichung

$$\langle \zeta, F(u) \rangle = 0 \quad \text{für alle } \zeta \in M_0.$$

Dies bedeutet, daß  $u$  eine schwache Lösung des folgenden Randwertproblems ist:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot a(\cdot, u, \nabla u) + f(\cdot, u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 && \text{auf } \Gamma, \\ \nu \cdot a(\cdot, u, \nabla u) + g(\cdot, u) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Als Beispiel für eine durch eine Menge  $M$  gegebene Nebenbedingung, die keine affinen Unterraum darstellt, lösen wir hier das schon in 1.5 angesprochene doppelseitige Hindernisproblem.

**2.12 Hindernisproblem.** Es sei  $F$  wie in 2.10 mit  $m = 1$ . Gegeben seien zwei Funktionen

$$\underline{u} : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[ \quad \text{und} \quad \bar{u} : \Omega \rightarrow ]-\infty, \infty],$$

die wir als Hindernisse bezeichnen. Weiter sei  $\Gamma \subset \partial\Omega$  eine  $\mathcal{H}^{n-1}$ -meßbare Menge und  $u_0 \in H^{1,p}(\Omega)$  wie in 2.10. Wir definieren

$$M := \left\{ v \in H^{1,p}(\Omega); \underline{u} \leq v \leq \bar{u} \text{ fast überall in } \Omega, \right. \\ \left. v = u_0 \text{ fast überall auf } \Gamma \right\}.$$

Falls dann

$$(2.12.1) \quad \underline{u} \leq u_0 \leq \bar{u} \quad \text{fast überall in } \Omega,$$

$$(2.12.2) \quad \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) > 0 \quad \text{oder} \\ \min(\mathcal{L}^n(\{\underline{u} > -\infty\}), \mathcal{L}^n(\{\bar{u} < +\infty\})) > 0,$$

so existiert eine Lösung  $u \in M$  des Hindernisproblems, d.h. mit

$$\langle u - v, F(u) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

*Beweis.* Wegen (2.12.1) ist  $u_0 \in M$ . Um Satz 2.11 anwenden zu können haben wir  $\alpha$  für  $u_0 + \alpha \in M$  abzuschätzen. Hat  $\Gamma$  positives Maß, so muß  $\alpha = 0$  sein. Ansonsten gibt es nach (2.12.2) Mengen  $S_{\pm} \subset \Omega$  mit positivem Maß, so daß

$$\underline{u} > -\infty \quad \text{auf } S_- \quad \text{und} \quad \bar{u} < +\infty \quad \text{auf } S_+.$$

Wegen  $\underline{u} \leq u_0 + \alpha \leq \bar{u}$  folgt dann

$$\alpha \geq \operatorname{ess\,sup}_{S_-}(\underline{u} - u_0) > -\infty$$

und

$$\alpha \leq \operatorname{ess\,inf}_{S_+}(\bar{u} - u_0) < +\infty.$$

□

Die Regularität der Lösung des Hindernisproblems werden wir in Abschnitt 4 untersuchen. Im Vorgriff sei hier nur bemerkt, daß im Standardfall

$$a(x, z_0, z_1) = z_1 \quad \text{mit } p = 2, \quad f(x, z) = 1 \quad \text{und} \quad g(x, z) = 0$$

die Variationsungleichung lautet

$$\int_{\Omega} \nabla(u-v) \cdot \nabla u + (u-v) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Im einfachsten Fall eines einzigen Hindernisses, d.h.  $\underline{u} = 0$  und  $\bar{u} = +\infty$  wird dann folgen, daß

$$\Delta u = \begin{cases} 1 & \text{in } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{fast überall in } \{u = 0\}. \end{cases}$$

Das heißt,  $u$  löst eine Differentialgleichung mit einem Sprung im Verbrauchsterm (vgl. 1.4).

Während also Probleme mit solchen Unstetigkeiten als Variationsungleichungen formuliert werden können, trifft dies nicht zu für Sprünge wie in 1.2 und 1.3. Wir werden im folgenden jedoch zeigen, daß sich Probleme mit Sprüngen im Diffusionskoeffizienten und im Driftterm als Grenzwerte von Variationsungleichungen (ohne Nebenbedingungen) auffassen lassen können. Wir beschränken uns dabei auf den Fall skalarer Differentialgleichungen.

**2.13 Springender Diffusionskoeffizient.** Es sei  $F$  definiert wie in 2.10 mit  $m = 1$  und  $p = 2$ . Die Koeffizienten mögen die dortigen Voraussetzungen erfüllen mit der Ausnahme, daß in (2.10.0)

$$a(x, z_0, z_1) = d(x, z_0)z_1 + e(x, z_0)$$

mit Diffusionskoeffizient

$$d(x, z) = \begin{cases} d^+(x, z) & \text{für } z > 0, \\ d^-(x, z) & \text{für } z < 0, \end{cases}$$

wobei  $e : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $d^\pm : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  Carathéodory-Funktionen seien. Wir betrachten das Dirichlet-Problem bezüglich einer meßbaren Menge  $\Gamma \subset \partial\Omega$  mit positivem Maß, d.h. für  $u \in V = H^{1,2}(\Omega)$  sei

$$M_u := \{v \in V; v = u \text{ fast überall auf } \Gamma\}.$$

Gesucht ist also ein  $u \in M_{u_0}$  (mit  $u_0$  aus 2.10), so daß

$$\langle \zeta, F(u) \rangle = 0 \quad \text{für alle } \zeta \in M_0,$$

wobei

$$\langle \zeta, F(u) \rangle := \int_{\Omega} (\nabla \zeta \cdot (d(\cdot, u) \nabla u + e(\cdot, u))) + \zeta f(\cdot, u) + \int_{\partial\Omega} \zeta g(\cdot, u) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dabei ist zu beachten, daß

$$\nabla u = 0 \quad \text{fast überall auf } \Omega \cap \{u = 0\},$$

d.h. im Term  $d(\cdot, u)\nabla u$  ist es nicht erforderlich,  $d(\cdot, 0)$  zu definieren, obwohl wir konsistenterweise setzen könnten

$$d(\cdot, 0) := \frac{1}{2} (d^-(\cdot, 0) + d^+(\cdot, 0)) .$$

Wir beweisen die Existenz einer Lösung dieses Randwertproblems, indem wir den möglichen Sprung von  $d(x, \cdot)$  bei 0 durch glatte Funktionen  $d_\varepsilon(x, \cdot)$  approximieren.

**2.14 Satz.** Es gibt eine Lösung  $u \in M_{u_0}$  des Randwertproblems in 2.13.

*Beweis.* Wir approximieren  $d$  durch Carathéodory-Funktionen  $d_\varepsilon$  für  $\varepsilon \searrow 0$ , z.B. durch

$$d_\varepsilon(x, z) := \begin{cases} d^+(x, z) & \text{für } z \geq \varepsilon, \\ \frac{1}{2} (d^+(x, \varepsilon) + d^-(x, -\varepsilon)) \\ \quad + \frac{z}{2\varepsilon} (d^+(x, \varepsilon) - d^-(x, -\varepsilon)) & \text{für } -\varepsilon \leq z \leq \varepsilon, \\ d^-(x, z) & \text{für } z \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

Da  $d_\varepsilon$  gleichmäßig elliptisch sind (im Sinne der Strukturvoraussetzung in (2.10.1)), d.h.

$$z_1 \cdot d_\varepsilon(x, z_0)z_1 \geq c_0|z_1|^2 \quad \text{für } x \in \Omega, z_0 \in \mathbb{R}, z_1 \in \mathbb{R}^n$$

mit einer von  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten  $c_0$ , sind die zugehörigen Operatoren  $F_\varepsilon$  koerziv gleichmäßig in  $\varepsilon$  (siehe Beweis von 2.11), d.h. es gilt mit einer von  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten  $C$

$$\langle u - u_0, F_\varepsilon(u) \rangle \geq \frac{c_0}{4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C(u_0) \quad \text{für } u \in M_{u_0}.$$

Nach Satz 2.11 gibt es daher eine Lösung  $u_\varepsilon \in M_{u_0}$  zum Operator  $F_\varepsilon$  auf  $M_{u_0}$ , d.h.

$$\langle u_\varepsilon - v, F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M_{u_0}.$$

Setzen wir  $v = u_0$ , so folgt aus der Koerzivität und der Poincaré-Ungleichung auf  $M_{u_0}$ , daß  $\|u_\varepsilon\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq C$  gleichmäßig in  $\varepsilon$ , und da  $M_{u_0}$  ein affiner Unterraum ist, erhalten wir

$$\langle \zeta, F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle = 0 \quad \text{für alle } \zeta \in M_0.$$

Zur Konvergenz für  $\varepsilon \rightarrow 0$  zerlegen wir  $F_\varepsilon$  in

$$F_\varepsilon(u) = A_\varepsilon(u, u) + K(u),$$

wobei

$$\begin{aligned} \langle \zeta, A_\varepsilon(w, u) \rangle &:= \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot d_\varepsilon(\cdot, w) \nabla u, \\ \langle \zeta, K(w) \rangle &:= \int_{\Omega} (\nabla \zeta \cdot e(\cdot, w) + \zeta f(\cdot, w)) + \int_{\partial\Omega} \zeta g(\cdot, w) d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Wegen der Wachstumsbedingungen (2.10.2) an  $f, g$  und  $a$ , die auch implizieren daß

$$|e(x, z)|^2 \leq 2(|z|^2 + \varphi_1(x)) ,$$

folgt wie in Beweis von Satz 2.11 (mit analoger Anwendung für den  $e$ -Term) die schwache Stetigkeit von  $K$ . Da  $u_\varepsilon$  in  $H^{1,2}(\Omega)$  beschränkt sind, gibt es ein  $u \in H^{1,2}(\Omega)$  so daß für eine Teilfolge

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u && \text{schwach in } H^{1,2}(\Omega), \\ u_\varepsilon &\rightarrow u && \text{fast überall in } \Omega. \end{aligned}$$

Wir schließen daraus, daß  $u \in M_{u_0}$  und daß

$$\langle \zeta, K(u_\varepsilon) \rangle \rightarrow \langle \zeta, K(u) \rangle \quad \text{für } \zeta \in M_0.$$

Es bleibt also die Konvergenz von  $A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$  zu untersuchen, wobei die Schwierigkeit darin besteht, daß wir nicht erwarten können, daß  $d_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon)$  punktweise gegen  $d(\cdot, u)$  konvergiert, falls  $d$  keine Carathéodory-Funktion ist.

Daher zerlegen wir

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^0 + u_\varepsilon^-$$

mit

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^+ &:= \max(u_\varepsilon - \varepsilon, 0) , \\ u_\varepsilon^- &:= \min(u_\varepsilon + \varepsilon, 0) , \\ u_\varepsilon^0 &:= \max(-\varepsilon, \min(\varepsilon, u_\varepsilon)) . \end{aligned}$$

Da  $u_\varepsilon^\pm, u_\varepsilon^0$  als Anteil von  $u_\varepsilon$  in  $H^{1,2}(\Omega)$  beschränkt sind, gibt es Funktionen  $u^\pm, u_0$  mit

$$u_\varepsilon^+ \rightarrow u^+ , \quad u_\varepsilon^0 \rightarrow u^0 , \quad u_\varepsilon^- \rightarrow u^-$$

schwach in  $H^{1,2}(\Omega)$  und fast überall in  $\Omega$ . Da  $u_\varepsilon^+ \geq 0$  folgt  $u^+ \geq 0$ , entsprechend  $u^- \leq 0$ , und da  $|u_\varepsilon^0| \leq \varepsilon$  muß  $u^0 = 0$  sein. Außerdem folgt aus  $u_\varepsilon^+ \cdot u_\varepsilon^- = 0$  daß  $u^+ \cdot u^- = 0$ , und da  $u_\varepsilon \rightarrow u$  fast überall, erhalten wir

$$u^+ = \max(u, 0) \quad \text{und} \quad u^- = \min(u, 0) .$$

Nun gilt entsprechend der Zerlegung von  $u_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot d_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon^0) \nabla u_\varepsilon^0 \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot (d^+(\cdot, u_\varepsilon^+ + \varepsilon) \nabla u_\varepsilon^+ + d^-(\cdot, u_\varepsilon^- - \varepsilon) \nabla u_\varepsilon^-) . \end{aligned}$$

Da  $d^+(\cdot, u_\varepsilon^+ + \varepsilon) \rightarrow d^+(\cdot, u^+)$  fast überall in  $\Omega$ , entsprechend  $d^-(\cdot, u_\varepsilon^- - \varepsilon) \rightarrow d^-(\cdot, u^-)$ , konvergiert das letzte Integral gegen

$$\int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot (d^+(\cdot, u^+) \nabla u^+ + d^-(\cdot, u^-) \nabla u^-) = \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot d(\cdot, u) \nabla u ,$$

wenn wir beachten, daß  $\nabla u = 0$  fast überall in  $\{u = 0\}$ . Zum Beweis der Behauptung

$$0 = \langle \zeta, F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle \rightarrow \langle \zeta, F(u) \rangle$$

bleibt also nachzuweisen, daß

$$(2.14.1) \quad \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot d_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon^0) \nabla u_\varepsilon^0 \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Nun ist

$$\nabla \zeta \cdot d_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon^0) = \varphi_\varepsilon^1 + \frac{u_\varepsilon^0}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon^2,$$

wobei für  $\delta \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi_\delta^1 &:= \frac{1}{2} \nabla \zeta \cdot (d^+(\cdot, \delta) + d^-(\cdot, -\delta)), \\ \varphi_\delta^2 &:= \frac{1}{2} \nabla \zeta \cdot (d^+(\cdot, \delta) - d^-(\cdot, -\delta)). \end{aligned}$$

Definieren wir noch

$$v_\varepsilon^1 := u_\varepsilon^0 \quad \text{und} \quad v_\varepsilon^2 := \frac{1}{2\varepsilon} (u_\varepsilon^0)^2$$

so erhalten wir die Darstellung

$$\int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot d_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon^0) \nabla u_\varepsilon^0 = \sum_{j=1,2} \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon^j \cdot \nabla v_\varepsilon^j.$$

Nun sind  $v_\varepsilon^j$  in  $H^{1,2}(\Omega)$  beschränkt mit  $|v_\varepsilon^j| \leq C \cdot \varepsilon \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Damit konvergiert für eine Teilfolge  $v_\varepsilon^j \rightarrow 0$  schwach in  $H^{1,2}(\Omega)$ , also  $\nabla v_\varepsilon^j \rightarrow 0$  schwach in  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Aus der Wachstumsbedingung (2.10.2) folgt, daß  $d^\pm(\cdot, z)$  gleichmäßig beschränkte Funktionen sind. Da  $d^\pm(\cdot, z) \rightarrow d^\pm(\cdot, 0)$  punktweise für  $z \rightarrow 0$ , erhalten wir, daß für  $\delta \rightarrow 0$

$$\varphi_\delta^j \rightarrow \varphi_0^j \quad \text{stark in } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Somit gilt

$$\int_{\Omega} \varphi_\delta^j \cdot \nabla v_\varepsilon^j \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

was (2.14.1) beweist.  $\square$

Im gerade geführten Beweis war es wesentlich, daß wir den springenden Koeffizienten  $d(\cdot, u)$  in der Sprungstelle selbst, d.h. auf der Menge  $\{u = 0\}$  nicht kennen müssen. Der Grund war, daß der Faktor  $\nabla u$  auf der Menge  $\{u = 0\}$  fast überall Null ist, d.h.  $d(\cdot, u) \nabla u$  haben wir auf  $\{u = 0\}$  als Null definiert. Anders sieht die Situation bei Sprüngen im  $\varepsilon$ -Term (siehe 1.3) aus, da dann ein solcher rettender Faktor nicht auftritt.

**2.15 Springender Driffterm.** Wir setzen 2.10 voraus mit  $m = 1$ , aber der Ausnahme, daß in (2.10.0)

$$a(x, z_0, z_1) = a_0(x, z_0, z_1) + e(x, z_0) \quad \text{mit } a_0(x, z_0, 0) = 0$$

und

$$e(x, z) = \begin{cases} e^+(x, z) & \text{für } z > 0, \\ e^-(x, z) & \text{für } z < 0. \end{cases}$$

Dabei seien  $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $e^\pm : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  Carathéodory-Funktionen. Im Gegensatz zu 2.13 ist es nun erforderlich  $e(x, 0)$  zu definieren. Wegen des möglicherweise vorhandenen Sprungs gehen wir zu einer mengenwertigen Definition von  $e(x, \cdot)$  über, d.h. es sei

$$e(x, 0) := \left\{ \frac{1+\alpha}{2} e^+(x, 0) + \frac{1-\alpha}{2} e^-(x, 0) ; -1 \leq \alpha \leq 1 \right\}$$

und für  $z \neq 0$  identifizieren wir  $e(x, z)$  als einpunktige Menge mit seinem Element.

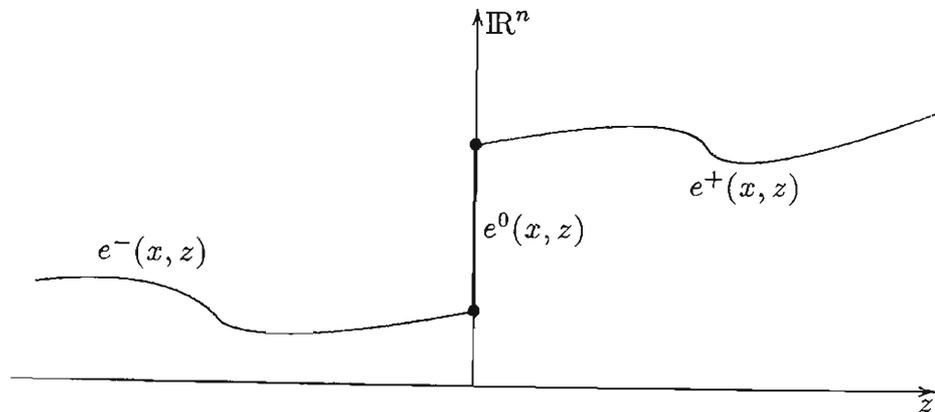


Bild 2.3: Das mengenwertige Vektorfeld  $e(x, \cdot)$

Für meßbare Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  bedeutet dann die Inklusion

$$\gamma \in e(\cdot, u),$$

daß

$$\begin{aligned} \gamma &= e^+(\cdot, u) && \text{in } \{u > 0\}, \\ \gamma &= e^-(\cdot, u) && \text{in } \{u < 0\}, \\ \gamma &\in \text{conv}\{e^+(\cdot, 0), e^-(\cdot, 0)\}. \end{aligned}$$

Die letzte Inklusion für die Funktion  $\gamma$  bedeutet, daß es eine meßbare Funktion  $\chi : \{u = 0\} \rightarrow [-1, 1]$  gibt mit

$$\gamma = \frac{1+\chi}{2} e^+(\cdot, 0) + \frac{1-\chi}{2} e^-(\cdot, 0) \quad \text{in } \{u = 0\}.$$

Alternativ können wir für  $\gamma \in e(\cdot, u)$  auch schreiben

$$\gamma = \frac{1+\chi}{2} e^+(\cdot, u) + \frac{1-\chi}{2} e^-(\cdot, u) \quad \text{in } \Omega$$

mit einer meßbaren Funktion  $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die erfüllt

$$\chi = 1 \text{ in } \{u > 0\}, \quad \chi = -1 \text{ in } \{u < 0\} \quad \text{und} \quad |\chi| \leq 1,$$

oder, wenn man will,

$$|\text{sign}(u)| + |\chi - \text{sign}(u)| \leq 1.$$

Wir beweisen den folgenden Existenzsatz:

**2.16 Satz** Unter den Voraussetzungen in 2.15 gibt es ein  $u \in M_{u_0}$  (siehe 2.13) und ein  $\gamma \in L^{p^*}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  so daß

$$\gamma \in e(\cdot, u)$$

und für alle  $\zeta \in M_0$

$$0 = \int_{\Omega} (\nabla \zeta (a_0(\cdot, u, \nabla u) + \gamma) + \zeta f(\cdot, u)) + \int_{\partial \Omega} \zeta g(\cdot, u) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von 2.14 definieren wir für  $\varepsilon > 0$  Approximationen

$$e_{\varepsilon}(x, z) := \begin{cases} e^+(x, z) & \text{für } z \geq \varepsilon, \\ \frac{1}{2} (e^+(x, \varepsilon) + e^-(x, -\varepsilon)) \\ \quad + \frac{z}{2\varepsilon} (e^+(x, \varepsilon) - e^-(x, -\varepsilon)) & \text{für } -\varepsilon \leq z \leq \varepsilon, \\ e^-(x, z) & \text{für } z \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

Die Voraussetzungen an  $a$  in 2.10 implizieren die gleiche Abschätzungen für  $a_0$  sowie

$$|e_{\varepsilon}(x, z)| \leq \delta^{\frac{p-1}{p}} |z|^{p-1} + \varphi_{\delta}(x)^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{gleichmäßig in } \varepsilon.$$

Die zugehörigen Operatoren  $F_{\varepsilon}$  sind damit wieder gleichmäßig koerziv, so daß also nach Satz 2.11 Funktionen  $u_{\varepsilon} \in M_{u_0}$  gibt mit  $\|u_{\varepsilon}\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq C$  und

$$\langle \zeta, F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \rangle = 0 \quad \text{für alle } \zeta \in M_0.$$

Wir wählen wieder eine Teilfolge  $\varepsilon \rightarrow 0$ , für die

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon} &\rightarrow u && \text{schwach in } H^{1,2}(\Omega), \\ u_{\varepsilon} &\rightarrow u && \text{fast überall in } \Omega \end{aligned}$$

mit einem  $u \in M_{u_0}$ . Zur Konvergenzbetrachtung zerlegen wir nun  $F_{\varepsilon}$  in

$$F_{\varepsilon}(u) = F_0(u) + E_{\varepsilon}(u) \quad \text{mit} \quad F_0(u) := A_0(u, u) + K(u),$$

wobei

$$\begin{aligned}\langle \zeta, A_0(w, u) \rangle &:= \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot a_0(\cdot, w, \nabla u), \\ \langle \zeta, E_\varepsilon(u) \rangle &:= \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot e_\varepsilon(\cdot, u), \\ \langle \zeta, K(w) \rangle &:= \int_{\Omega} \zeta \cdot f(\cdot, w) + \int_{\partial\Omega} \zeta g(\cdot, w) d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

Der kritische Term ist nun der  $e$ -Term. Nach obiger Wachstumsabschätzung sind  $e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon)$  in  $L^{p^*}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  beschränkt, also gibt es eine Teilfolge  $\varepsilon \rightarrow 0$  und eine Funktion  $\gamma$  in diesem Raum, so daß

$$e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon) \rightarrow \gamma \quad \text{schwach in } L^{p^*}(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Da  $e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon) \rightarrow e^+(\cdot, u)$  fast überall in  $\{u > 0\}$ , entsprechend  $e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon) \rightarrow e^-(\cdot, u)$  in  $\{u < 0\}$ , folgt

$$\gamma = e(\cdot, u) \quad \text{fast überall in } \{u \neq 0\}.$$

Darüberhinaus gilt

$$(2.16.1) \quad \gamma \in \text{conv}\{e^+(\cdot, 0), e^-(\cdot, 0)\} \quad \text{fast überall in } \{u = 0\}.$$

Zum Beweis bemerke, daß es nach dem Satz von Egorov reicht, dies auf solchen meßbaren Teilmengen  $S \subset \{u = 0\}$  zu zeigen, auf denen  $u_\varepsilon \rightarrow u = 0$  gleichmäßig. Zu  $\delta_0 > 0$  gilt dann auf  $S$ , falls  $\varepsilon_0$  klein genug,

$$e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon) \in \text{conv}\{e^\pm(\cdot, \pm z); 0 \leq z \leq \delta_0\} \quad \text{für } \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Da nach einem Lemma von Mazur

$$\gamma \in \overline{\text{conv}\{e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon); \varepsilon \leq \varepsilon_0\}} \quad \text{in } L^{p^*}(\Omega)$$

folgt

$$\gamma \in \text{conv}\{e^\pm(\cdot, \pm z); 0 \leq z \leq \delta_0\} \rightarrow \text{conv}\{e^\pm(\cdot, 0)\}$$

für  $\delta_0 \rightarrow 0$  in  $L^{p^*}(\Omega)$ , was (2.16.1) beweist. Damit ist gezeigt, daß  $\gamma \in e(\cdot, u)$  und daß für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\langle \zeta, E_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \gamma \quad \text{für } \zeta \in V.$$

Für die Konvergenz der anderen Terme betrachten wir zunächst den Fall eines linearen Hauptteils von  $a$ , d.h.  $p = 2$  und

$$a_0(x, z_0, z_1) = d(x, z_0)z_1$$

mit einer Carathéodory-Funktion  $d: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Wie im Beweis von Satz 2.11 folgt die schwache Stetigkeit von  $K$ , so daß also

$$\langle \zeta, K(u_\varepsilon) \rangle \rightarrow \langle \zeta, K(u) \rangle \quad \text{für } \zeta \in V.$$

Da  $d(\cdot, u_\varepsilon)$  gleichmäßig beschränkte Funktionen sind, die punktweise gegen  $d(\cdot, u)$  konvergieren, und da  $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$  schwach in  $L^2(\Omega)$ , folgt

$$\langle \zeta, A_0(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \rangle \rightarrow \langle \zeta, A_0(u, u) \rangle \quad \text{für } \zeta \in V.$$

Damit löst das Paar  $(u, \gamma)$  die behauptete schwache Gleichung auf  $M_0$ .

Im allgemeinen Fall für  $a_0$  nutzen wir aus, daß Satz 2.11 auf  $F_0$  anwendbar ist, insbesondere erfüllt  $F_0$  die Stetigkeitsbedingung (2.1.3). Außerdem (2.1.1), woraus folgt, daß für eine Teilfolge  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$F_0(u_\varepsilon) \rightarrow u^* \quad \text{schwach* in } V^*.$$

Können wir nun zeigen, daß

$$(2.16.2) \quad \langle u_\varepsilon, F_0(u_\varepsilon) \rangle \rightarrow \langle u, u^* \rangle \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

so folgt aus der Stetigkeitsbedingung (2.1.3), daß

$$\langle \zeta, F_0(u) - u^* \rangle = 0 \quad \text{für } \zeta \in M_0,$$

und daher

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \zeta, F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle = \langle \zeta, F_0(u_\varepsilon) \rangle + \langle \zeta, E_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle \\ &\rightarrow \langle \zeta, F_0(u) \rangle + \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \gamma, \end{aligned}$$

d.h.  $(u, \gamma)$  löst die gewünschte Gleichung. Wir beweisen nun (2.16.2) unter der Annahme, daß

$$(2.16.3) \quad \langle u_\varepsilon, E_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot e(\cdot, u) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wegen  $\langle u_\varepsilon - u, F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle = 0$  gilt dann

$$\begin{aligned} \langle u_\varepsilon, F_0(u_\varepsilon) \rangle &= \langle u, F_0(u_\varepsilon) \rangle - \langle u_\varepsilon, E_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle + \langle u, E_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle \\ &\rightarrow \langle u, u^* \rangle - \int_{\Omega} \nabla u \cdot e(\cdot, u) + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Da  $\gamma \in e(\cdot, u)$  und  $\nabla u = 0$  fast überall in  $\{u = 0\}$ , ist  $\nabla u \cdot \gamma = \nabla u \cdot e(\cdot, u)$ , womit (2.16.2) gezeigt ist. Wir sehen also, daß das Integral in (2.16.3) wegen des  $\nabla u$ -Faktors eine ähnliche Rolle spielt wie der  $d$ -Term in Beweis von 2.14.

Daher zerlegen wir zum Beweis von (2.16.3) wie im Beweis von 2.14

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^0 + u_\varepsilon^-$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \langle u_\varepsilon, E_\varepsilon(u_\varepsilon) \rangle &= \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon) \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u_\varepsilon^+ \cdot e_\varepsilon^+(\cdot, u_\varepsilon^+ + \varepsilon) + \nabla u_\varepsilon^- \cdot e_\varepsilon^-(\cdot, u_\varepsilon^- - \varepsilon)) \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon^0 \cdot e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon^0). \end{aligned}$$

Da  $u_\varepsilon^+ \rightarrow u^+ = \max(u, 0)$  und  $u_\varepsilon^- \rightarrow u^- = \min(u, 0)$  schwach in  $V$  wie im Beweis von 2.14 und da  $e^\pm$  Carathéodory-Funktionen sind, konvergiert das erste Integral auf der rechten Seite gegen

$$\int_{\Omega} (\nabla u^+ \cdot e^+(\cdot, u^+) + \nabla u^- \cdot e^-(\cdot, u^-)) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot e(\cdot, u),$$

da  $\nabla u = 0$  fast überall in  $\{u = 0\}$ . Zu zeigen bleibt also, daß

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon^0 \cdot e_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon^0) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dies beweist man wie in (2.14.1), denn obige Wachstumsabschätzung für  $e_\varepsilon$  impliziert, daß  $e^\pm(\cdot, z) \rightarrow e^\pm(\cdot, 0)$  stark in  $L^{p^*}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  für  $z \rightarrow 0$ .  $\square$

Falls für die Lösung  $u$  aus 2.16 gilt daß  $\mathcal{L}^n(\{u = 0\}) = 0$ , so können wir in der schwachen Differentialgleichung  $\gamma$  durch  $e(\cdot, u)$  ersetzen. Im allgemeinen wird jedoch  $\mathcal{L}^n(\{u = 0\}) > 0$  sein. Wir nennen dann  $\{u = 0\}$  eine Mischzone. Als Beispiel dafür betrachten wir:

**2.17 Eindimensionale Grundwasserströmung.** Das gegebene Gebiet  $\Omega = ]-1, 1[ \subset \mathbb{R}$  modelliere eine vertikale Sandsäule, durch die Wasser sickert, wobei die relevante Größe der Wasserdruck  $u$  sei mit

$$\begin{aligned} (a(u' + \chi_{\{u>0\}}))' &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u(-1) &= 0, \quad u(1) = u_0 > 0. \end{aligned}$$

Dabei sei mit  $a_0 > 0$  die Durchlässigkeit  $a$  des Sandes gegeben durch

$$a(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ a_0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dies modelliert eine Sandsäule mit zwei verschiedenen Körnungen. Ist  $a_0 > 1$  so liegt in  $] -1, 0[$  eine gröbere Korngröße vor als in  $]0, 1[$ . Oberhalb des Sandes befindet sich eine Wassersäule, und aufgrund der Schwerkraft sickert das Wasser mit Druck  $u_0$  in den Sand. Am unteren Ende der Sandsäule tropft Wasser aus.

In der zugehörigen schwache Formulierung von 2.16 betrachten wir Paare

$$(u, \gamma) \in H^{1,p}(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$$

mit obiger Randwertbedingung für  $u$  und  $\gamma \in e(u)$ , für die

$$\int_{\Omega} \zeta' a(u' + \gamma) = 0 \quad \text{für } \zeta \in \dot{H}^{1,2}(\Omega).$$

Dabei ist

$$e(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z > 0, \\ [0, 1] & \text{für } z = 0, \\ 0 & \text{für } z < 0. \end{cases}$$

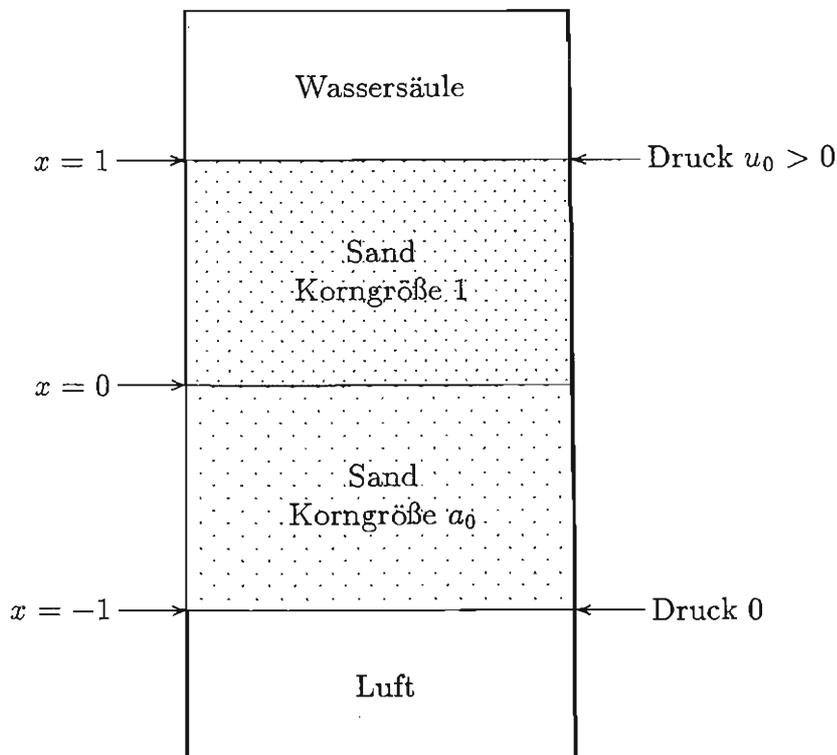


Bild 2.4: Sickerung durch eine Sandsäule

Zunächst bemerke, daß für jede solche schwache Lösung  $u \geq 0$ . Die folgt aus dem schwachen Maximumprinzip, indem wir  $\zeta = \min(u, 0)$  setzen und  $\gamma = 0$  in  $\{u < 0\}$  ausnutzen. Außerdem folgt aus der schwachen Differentialgleichung, daß für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$a(u' + \gamma) = \lambda \quad \text{fast überall in } ]-1, 1[.$$

Nun ist  $u \in H^{1,2}(]-1, 1[) \subset C^{0,1/2}([-1, 1])$ , d.h.  $\{u > 0\}$  ist eine offene Menge, in der  $\gamma = 1$ . Es folgt

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\lambda}{a} - 1 && \text{fast überall in } \{u > 0\}, \\ \gamma &= \frac{\lambda}{a} && \text{fast überall in } \{u = 0\}. \end{aligned}$$

Da also  $u \geq 0$  und  $u' = \text{const}$  in  $] -1, 0[ \cap \{u > 0\}$  mit  $u(-1) = 0$ , sowie  $u' = \text{const}$  in  $]0, 1[ \cap \{u > 0\}$  mit  $u(1) = u_0 > 0$ , folgt die Existenz eines Punktes  $x_0 \in [-1, 1[$ , so daß

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 && \text{für } -1 \leq x \leq x_0, \\ u(x) &> 0 && \text{für } x_0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Wäre  $-1 < x_0 < 0$ , so wäre  $\gamma = \frac{\lambda}{a_0}$  in  $] -1, x_0[$ , also  $0 \leq \frac{\lambda}{a_0} \leq 1$ , andererseits  $u' = \frac{\lambda}{a_0} - 1 > 0$  in  $]x_0, 0[$ , also  $\frac{\lambda}{a_0} > 1$ , ein Widerspruch. Ähnlich folgt, daß der Fall  $0 < x_0 < 1$  nicht auftreten kann. Also ist

$$x_0 = -1 \quad \text{oder} \quad x_0 = 0.$$

Im ersten Fall ist  $u(-1) = 0$ ,  $u(0) > 0$ ,  $u(1) = u_0 > 0$  und

$$u' = \frac{\lambda}{a_0} - 1 > 0 \quad \text{in } ] -1, 0[ , \quad u' = \lambda - 1 > 0 \quad \text{in } ]0, 1[ .$$

Daraus erhalten wir die Bedingung

$$0 < a_0 < u_0 + 1 ,$$

sowie die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung  $u > 0$  mit  $\gamma = 1$ . Im zweiten Fall ist  $u = 0$  genau in  $[-1, 0]$  und  $u(1) = u_0 > 0$  mit

$$0 \leq \gamma = \frac{\lambda}{a_0} \leq 1 \quad \text{in } ] -1, 0[ , \quad u' = \lambda - 1 > 0 \quad \text{in } ]0, 1[ .$$

Daraus erhalten wir die Bedingung

$$a_0 \geq u_0 + 1$$

und eine eindeutig bestimmte Lösung mit

$$\gamma = \begin{cases} \frac{u_0+1}{a_0} & \text{in } ] -1, 0[ , \\ 1 & \text{in } ]0, 1[ , \end{cases}$$

d.h. für  $a_0 > u_0 + 1$  tritt eine Mischzone mit  $u = 0$  und  $0 < \gamma < 1$  auf.

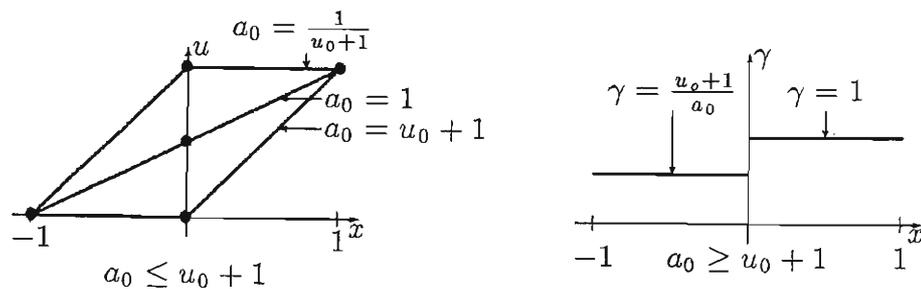


Bild 2.5: Lösung  $(u, \gamma)$  in Abhängigkeit von  $u_0$  und  $a_0$ .

Ein zweidimensionales Beispiel, für das eine eindeutige Lösung mit Mischzone  $\{0 < \gamma < 1\}$  existiert, ist in [A2, Beispiel 4.6] angegeben.



### 3 Kapazität

In diesem Abschnitt behandeln wir den variationellen Zugang zum Begriff der Kapazität beschränkter Mengen im  $\mathbb{R}^n$ . Betrachte dazu zunächst die Lösung  $u \in M \subset H^{1,2}(\Omega)$  des einseitigen Hindernisproblems (2.12 mit  $\underline{u} = \infty$ )

$$\int_{\Omega} \nabla(u-v) \nabla u \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M$$

mit

$$M = \{v \in H^{1,2}(\Omega) ; v = 0 \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-fast überall auf } \partial\Omega, \\ v \geq \underline{u} \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall auf } \Omega \},$$

wobei wir uns für den Fall interessieren, daß für eine Menge  $E \subset\subset \Omega$  mit  $\mathcal{L}^n(E) > 0$

$$\underline{u} > 0 \quad \text{in } E, \quad \underline{u} = -\infty \quad \text{in } \Omega \setminus E.$$

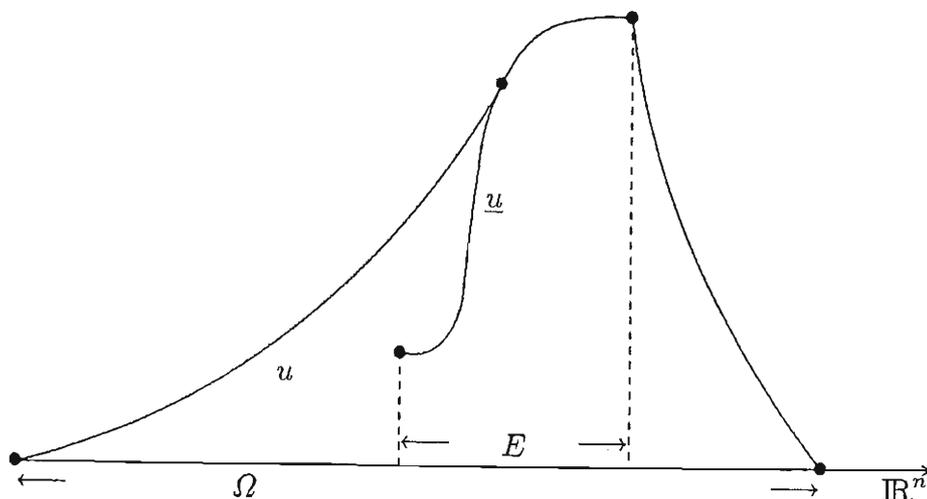


Bild 3.1: Lösung für ein Hindernis auf  $E$  für  $n \geq 2$ .

Für den Spezialfall, daß  $\underline{u} = 1$  auf  $E$ , folgt aus dem Maximumprinzip (setze  $v = \min(u, 1)$ ), daß  $u \leq 1$ , somit  $u = \underline{u} = 1$  auf  $E$ . Die Frage ist nun, wie sich die Lösung  $u$  verhält, wenn die  $n$ -dimensionale Menge  $E$  gegen ein niederdimensionales Objekt konvergiert. Im Limes sprechen wir dann von einem dünnen Hindernis. Ist  $E$  z.B. ein Hyperflächenstück, so läßt sich eine zugehörige Menge  $M$  mit  $u \geq \underline{u} = 1$  auf  $E$  nicht mehr bezüglich des Lebesgue-Maßes auf  $\Omega$  definieren, sondern höchstens bezüglich der Spurwerte im  $\mathcal{H}^{n-1}$ -Maß. Damit bliebe aber immer noch unbeantwortet, ob das Hindernisproblem für  $m$ -dimensionale Objekte  $E$  mit  $m \leq n-2$  formulierbar bzw. lösbar ist, d.h. welche niederdimensionalen Hindernisse in der Lage sind, eine nichttriviale Lösung der Variationsungleichung zu tragen. Die Beantwortung dieser Frage führt uns zum Begriff der Kapazität einer Menge, d.h. wir werden sehen, daß

$E$  eine nichttriviale Lösung trägt genau dann, wenn  $E$  eine positive Kapazität hat (siehe Satz 3.15).

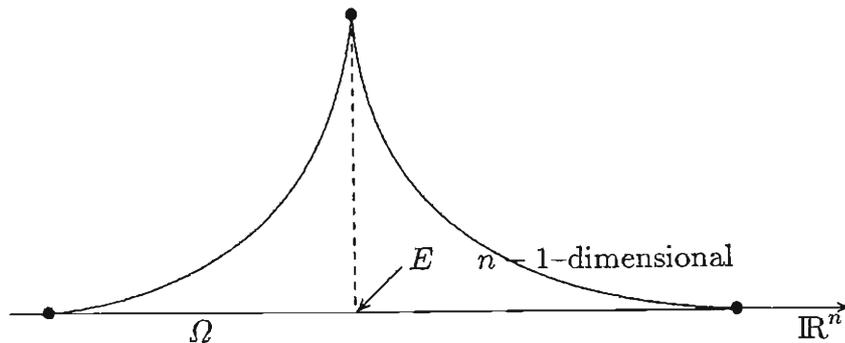


Bild 3.2: Lösung für ein dünnes Hindernis

Da dieser Begriff identisch ist mit der Kapazität eines elektrischen Leiters, geben wir hier zur weiteren Motivation die elektrostatische Definition des Kapazitätskoeffizienten an. Dazu sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  eine offene Menge (z.B.  $\Omega = \mathbb{R}^3$ ) und  $E_j \subset \mathbb{R}^3$  mit  $j = 1, \dots, m$ , disjunkte kompakte Teilmengen mit glattem Rand. Diese Mengen interpretieren wir als Ladungsträger, auf denen Spannungen  $U_j$  vorgegeben seien, und  $D := \Omega \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_m)$  interpretieren wir als Vakuum. Die Spannung auf  $\partial\Omega$  sei 0, wobei die Spannung im Unendlichen gegen 0 abklingen soll, falls  $\Omega$  unbeschränkt ist. Das elektrostatische Potential  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist dann die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 && \text{in } D, \\ \varphi &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \text{ und im Unendlichen,} \\ \varphi &= U_j && \text{auf } E_j \text{ für } j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Die dadurch induzierte statische Ladungsverteilung ist gegeben durch  $-\Delta\varphi$  als Distribution in  $\Omega$ . Somit ist die Gesamtladung  $Q_j$  auf dem Träger  $E_j$

$$Q_j = \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus E_j)} \partial_\nu \varphi \, d\mathcal{H}^2,$$

d.h. die Normalableitung wird vom Vakuum her genommen. Das Potential  $\varphi$  kann zerlegt werden in

$$\varphi = \sum_{i=1}^m U_i \varphi_i$$

wobei  $\varphi_i$  die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_i &= 0 && \text{in } D, \\ \varphi_i &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \text{ und im Unendlichen,} \\ \varphi_i &= \delta_{ij} && \text{auf } E_j \text{ für } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ist. Es folgt

$$Q_j = \sum_i C_{ji} U_i$$

mit

$$C_{ji} := \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus E_j)} \partial_\nu \varphi_i d\mathcal{H}^2.$$

Die Zahlen  $C_{jj}$  heißen Kapazitätskoeffizienten und  $C_{ji}$ ,  $j \neq i$ , heißen elektrostatische Induktionskoeffizienten. Die einzelnen Koeffizienten  $C_{jj}$  lassen sich also berechnen, indem man zur Konfiguration

$$\tilde{\Omega} := \Omega \setminus \bigcup_{i \neq j} E_i, \quad \tilde{E}_1 := E_j, \quad \tilde{D} := \tilde{\Omega} \setminus \tilde{E}_1$$

übergeht, die Lösung  $\tilde{\varphi}$  von

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\varphi} &= 0 && \text{in } \tilde{D}, \\ \tilde{\varphi} &= 0 && \text{auf } \partial \tilde{\Omega} \text{ und im Unendlichen,} \\ \tilde{\varphi} &= 1 && \text{auf } \tilde{E}_1 \end{aligned}$$

betrachtet und berechnet

$$C_{jj} = \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{E}_1)} \partial_\nu \tilde{\varphi} d\mathcal{H}^2.$$

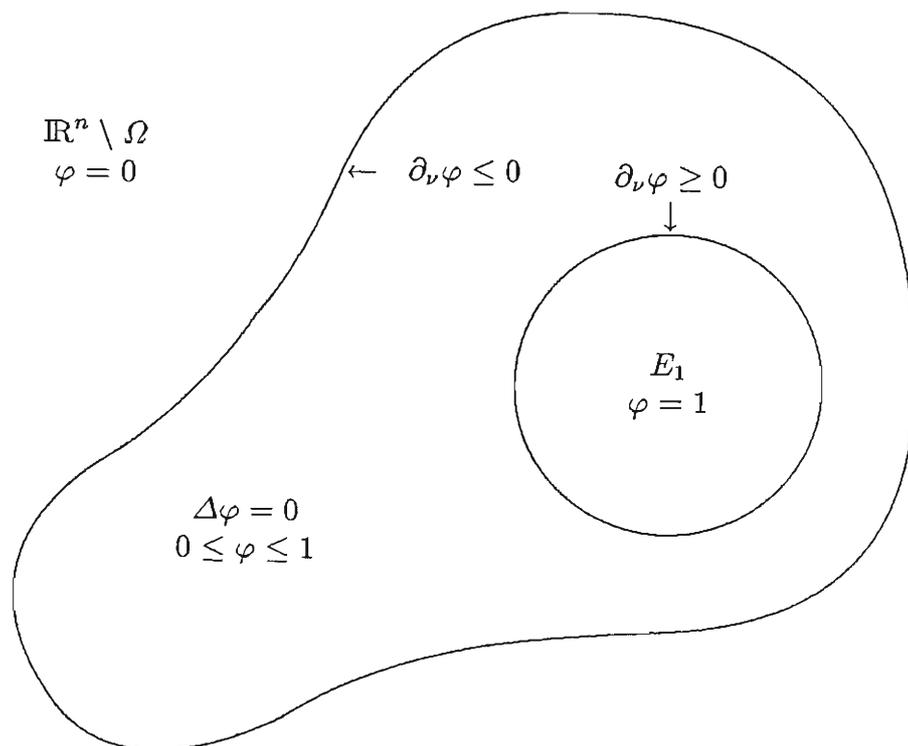


Bild 3.3: Elektrostatisches Potential im Fall  $m = 1$ .

Da nach dem Maximumprinzip  $0 < \tilde{\varphi} < 1$  in  $\tilde{\Omega} \setminus \tilde{E}_1$ , falls diese Menge zusammenhängend ist, muß nach dem Hopf-Prinzip  $\partial_\nu \tilde{\varphi} > 0$  sein auf  $\partial(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{E}_1)$ , woraus folgt, daß  $C_{jj} > 0$ . Im folgenden betrachten wir immer die Situation eines solchen einzelnen Kapazitätskoeffizienten, wobei aus den Eigenschaften von  $\tilde{\varphi}$  folgt, daß

$$C_{jj} = \int_{\partial \tilde{D}} \tilde{\varphi} \partial_\nu \tilde{\varphi} \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\tilde{D}} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 \, d\mathcal{L}^3 .$$

Da die Lösung der Randwertproblems für das Potential  $\tilde{\varphi}$  als absolutes Minimum des Funktionals

$$\varphi \mapsto \int_{\tilde{D}} |\nabla \varphi|^2$$

mit den vorgeschriebenen Randwerten gewonnen werden kann, kommen wir zur folgenden mathematischen Definition der Kapazität einer Menge.

**3.1 Definition.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $E \subset \Omega$  eine beschränkte Teilmenge. Für  $1 \leq p < \infty$  definieren wir die (äußere) Kapazität von  $E$  relativ zu  $\Omega$  durch

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(E, \Omega) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p ; u \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n) \text{ mit} \right. \\ \left. \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{fast überall außerhalb einer kompakten Menge } K \subset \overline{\Omega}, \\ u \geq 1 \quad \text{fast überall auf einer offenen Menge } D \supset E \end{array} \right\} . \end{aligned}$$

Dabei ist  $\text{cap}_p(E, \Omega) := \infty$ , falls die Menge, deren Infimum betrachtet wird, leer ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn  $E = \Omega$ , da es keine Funktion  $u \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  geben kann, die  $u \geq 1$  in  $\Omega$  und  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  erfüllt. Im Falle  $\Omega = \mathbb{R}^n$  schreiben wir auch  $\text{cap}_p(E)$  statt  $\text{cap}_p(E, \mathbb{R}^n)$ . Man beachte, daß die Kapazität nur mit Hilfe des Lebesgue-Maßes  $\mathcal{L}^n$  auf  $\mathbb{R}^n$  definiert ist, da die Gleichungen  $u = 0$  und  $u \geq 1$  in der Definition fast überall im  $\mathcal{L}^n$ -Sinne zu verstehen sind. Offensichtlich gilt

$$\text{cap}_p(E_1, \Omega) \leq \text{cap}_p(E_2, \Omega) \quad \text{für } E_1 \subset E_2 \subset \Omega .$$

Die Fälle  $p > n$  und  $n = 1$  spielen eine besondere Rolle (siehe 3.2), so daß wir im folgenden immer

$$1 \leq p \leq n \quad \text{mit } n \geq 2$$

voraussetzen werden.

**3.2 Bemerkung.** Es sei  $p > n$  bzw.  $n = 1$ .

(3.2.1) Ist  $p > n$  und  $\overline{\Omega}$  echte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , so gilt  $\text{cap}_p(E, \Omega) > 0$  für jede nichtleere Teilmenge  $E \subset \Omega$ . Insbesondere ist

$$\text{cap}_p(\{x_0\}, B_{r_0}(x_0)) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1) \cdot \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{p-1} \cdot r_0^{n-p}.$$

(3.2.2) Ist  $p = n = 1$ , so gilt für jede nichtleere Teilmenge  $E \subset \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{cap}_1(E, \Omega) = 2.$$

*Beweis.* Zum Fall  $p > n$  bemerken wir, daß die Einbettung von  $\dot{H}^{1,p}(\Omega)$  nach  $C_{loc}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  mit  $\alpha := 1 - \frac{n}{p}$  stetig ist. Nun wähle  $x_0 \in E$  und einen großen Radius  $r_0 > 0$ , so daß es eine Kugel

$$B_{r_1}(x_1) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap B_{r_0}(x_0)$$

gibt. Dann gilt mit von  $r_0$  und  $r_1$  abhängigen Konstanten für jede Funktion  $u$  aus der Definition von  $\text{cap}_p(E, \Omega)$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_{r_0}(x_0)})} \leq C \|u\|_{H^{1,p}(B_{r_0}(x_0))},$$

und unter Verwendung einer Poincaré-Ungleichung

$$\leq C \|\nabla u\|_{L^p(B_{r_0}(x_0))} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{r_0}(x_0))} \geq \frac{|u(x_0) - u(x_1)|}{|x_0 - x_1|^\alpha} \geq \frac{1}{|x_0 - x_1|^\alpha} \geq c > 0,$$

folgt, daß

$$\text{cap}_p(E, \Omega) \geq c > 0.$$

Ist  $E = \{0\}$  und  $\Omega = B_{r_0} := B_{r_0}(0)$ , so liefert die spezielle Funktion

$$u_0(x) = \max\left(1 - \left(\frac{|x|}{r_0}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}, 0\right)$$

(nachdem wir sie approximiert haben durch die Funktionen, die  $\geq 1$  in Umgebungen von 0), daß

$$\text{cap}_p(\{0\}, B_{r_0}) \leq \int_{B_{r_0}} |\nabla u_0|^p.$$

Dieses Integral ist die rechte Seite der Identität in (3.2.1). Umgekehrt gilt für jede Funktion in der Definition der Kapazität

$$\left(\int_{B_{r_0}} \frac{|\nabla u(x)|}{|x|^{n-1}} dx\right)^p \leq \int_{B_{r_0}} |\nabla u(x)|^p dx \cdot \left(\int_{B_{r_0}} \frac{dx}{|x|^{\frac{p(n-1)}{p-1}}}\right)^{p-1}.$$

Das Integral auf der linken Seite ist

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial B_1} \int_0^{r_0} |\nabla u(r\xi)| \, dr \, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \\
&\geq \int_{\partial B_1} |u(0) - u(r_0\xi)| \, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \\
&\geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1).
\end{aligned}$$

Dies ergibt die umgekehrte Ungleichung in der Behauptung.

Ist  $p = n = 1$ , so gilt für jede Funktion  $u$  in der Definition der Kapazität von  $E \subset\subset \Omega$  mit  $x_0 \in E$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u'| &= \int_{\Omega \cap \{x < x_0\}} |u'(x)| \, dx + \int_{\Omega \cap \{x > x_0\}} |u'(x)| \, dx \\
&\geq 2|u(x_0)| = 2.
\end{aligned}$$

Außerdem hat mit  $E \subset [x_-, x_+] \subset \Omega$  für kleines  $\delta > 0$  die Funktion

$$u_\delta(x) := \max\left(1 - \frac{\text{dist}(x, [x_-, x_+])}{\delta}, 0\right)$$

die Eigenschaft

$$\int_{\Omega} |u'_\delta| = 2.$$

Dies beweist (3.2.2) (siehe dazu auch Satz 3.8).  $\square$

Eine etwas modifizierte Definition der Kapazität ist die folgende, wobei wir, wie schon gesagt, von nun an immer annehmen, daß  $1 \leq p \leq n$  und  $n \geq 2$ .

**3.3 Bemerkung.** Für  $1 \leq q \leq \infty$  und  $\mathcal{L}^n$ -meßbare Mengen  $S \subset \Omega$  definiere

$$\begin{aligned}
M_{q,p}(S, \Omega) &:= \{u \in L^q(\mathbb{R}^n); \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ mit} \\
&\quad u = 0 \text{ fast überall in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ und} \\
&\quad u \geq 1 \text{ fast überall in } S \}.
\end{aligned}$$

Ist dann

$$1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q} \quad (q = \infty \text{ nur für } p = n \text{ erlaubt}),$$

so gilt für jede beschränkte Menge  $E \subset \Omega$

$$\text{cap}_p(E, \Omega) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p; u \in M_{q,p}(D, \Omega) \right. \\
\left. \text{für eine offene Menge } D \supset E \right\}.$$

Bei diesem Infimum kann man sich auf Funktionen  $u$  mit  $0 \leq u \leq 1$  beschränken.

*Beweis.* Sei  $s_q$  das Infimum in der Behauptung und  $\tilde{u}$  eine Funktion aus der Definition 3.1. Dann ist  $u := \max(0, \min(1, \tilde{u})) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger, also  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , somit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}|^p \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \geq s_q.$$

Damit ist  $s_q \leq \text{cap}_p(E, \Omega)$  gezeigt. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei  $u \in M_{q,p}(D, \Omega)$  mit offenem  $D \supset E$ . Ersetzen wir  $u$  durch  $\max(0, \min(1, u))$ , so verringert sich das  $L^q$ -Integral von  $u$  sowie das  $L^p$ -Integral von  $\nabla u$ . Also können wir annehmen, daß  $0 \leq u \leq 1$ . Sei  $\tilde{q}$  der optimale Exponent der Sobolev-Einbettung, d.h.

$$1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{\tilde{q}} \quad (\tilde{q} = \infty \text{ für } p = n).$$

Da  $\tilde{q} \geq q$  ist  $u^q \geq u^{\tilde{q}}$ , also  $u \in L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)$ . Ist dann  $E \subset B_{R_0}(0)$  und sind  $u_R$  zu  $R > R_0$  die Approximationen von  $u$  mit kompaktem Träger aus dem folgenden Lemma 3.4, so folgt für  $\delta > 0$

$$\text{cap}_E(E, \Omega) \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R|^p \leq (1 + \delta) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p,$$

was die Behauptung zur Folge hat. □

Wir hatten benutzt:

**3.4 Lemma.** Sei  $1 \leq p \leq n$  und  $p < q \leq \infty$  gegeben durch

$$(3.4.1) \quad 1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q} \quad (q = \infty \text{ für } p = n).$$

Dann gibt es zu  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$  mit  $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und  $R > R_0 > 0$  Funktionen  $u_R \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$u_R = u \quad \text{in } B_{R_0}(0), \quad u_R = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus B_R(0),$$

so daß für  $\delta > 0$

$$\|\nabla u_R\|_{L^p}^p \leq (1 + \delta) \|\nabla u\|_{L^p}^p + C(n, p, \delta) \cdot \|u\|_{L^q}^p \cdot \left( \log \frac{R}{R_0} \right)^{-\frac{p(n-1)}{n}}.$$

*Beweis.* Sei  $\eta \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n; [0, 1])$  eine Abschneidefunktion mit  $\eta = 1$  in  $B_{R_0}(0)$  und  $\eta = 0$  außerhalb  $B_R(0)$ , sowie  $u_R := u \cdot \eta$ . Die elementare Ungleichung

$$(3.4.2) \quad (\alpha + \beta)^p \leq (1 + \delta)\alpha^p + C_\delta \beta^p \quad \text{für } \alpha, \beta \geq 0, \delta > 0,$$

angewandt auf  $|\nabla u_R| \leq |\nabla u| + |u| |\nabla \eta|$  ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R|^p \leq (1 + \delta) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + C_\delta \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p |\nabla \eta|^p.$$

Das letzte Integral ist mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und der Definition von  $q$

$$\leq \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \eta|^n \right)^{\frac{p}{n}}.$$

Wählen wir speziell

$$\eta(x) = \frac{\log \frac{R}{|x|}}{\log \frac{R}{R_0}} \quad \text{für } R_0 \leq |x| \leq R,$$

so ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \eta|^n = C(n) \left( \log \frac{R}{R_0} \right)^{1-n}.$$

□

Als Konsequenz erhalten wir, daß das Infimum in 3.3 angenommen wird, falls die Menge  $E$  offen ist, d.h. die Kapazität ist dann der Wert des absoluten Minimums eines Variationsproblems.

**3.5 Satz.** Es sei  $1 < p \leq n$  und  $\Omega$  beschränkt, falls  $p = n$ . Dann gibt es zu jeder offenen (!) Menge  $E \subset \Omega$  mit  $\text{cap}_p(E, \Omega) < \infty$  genau eine Funktion  $\varphi_E \in M_{q,p}(E, \Omega)$  mit  $q$  wie in (3.4.1), so daß

$$\text{cap}_p(E, \Omega) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_E|^p.$$

Wir nennen  $\varphi_E$  das Kapazitätspotential zu  $E$ . Dieses ist charakterisiert durch die Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} \nabla(\varphi_E - v) \cdot \nabla_p \varphi_E \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M_{q,p}(E, \Omega)$$

mit dem  $p$ -Gradienten  $\nabla_p \varphi_E$  wie in (2.6.4). Darüberhinaus gilt fast überall

$$0 \leq \varphi_E \leq 1 \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi_E = 1 \quad \text{auf } E.$$

*Beweis.* Es sei  $1 < q < \infty$  mit

$$(3.5.1) \quad 1 < p < n, \quad 1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}, \quad \Omega \text{ beliebig,}$$

beziehungsweise (im Gegensatz zur Formulierung des Satzes)

$$(3.5.2) \quad p = n, \quad n \leq q < \infty \text{ beliebig, } \Omega \text{ beschränkt.}$$

Wir betrachten den Raum

$$V := \{u \in L^q(\mathbb{R}^n) ; \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ und } u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \} .$$

Da die Funktionen  $(u, \nabla u)$  mit  $u \in V$  einen abgeschlossenen Unterraum von  $L^q(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  bilden, ist  $V$  ein separabler reflexiver Raum. Außerdem impliziert die Wahl von  $q$  und  $\Omega$  in (3.5.1) bzw. (3.5.2) nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz, daß

$$\|u\|_V := \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

eine Norm auf  $V$  ist. Damit ist durch

$$\langle \zeta, A(u) \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \zeta \cdot \nabla_p v$$

ein strikt monotoner Operator  $A : V \rightarrow V^*$  definiert, was in (2.6.5) nachgerechnet wurde.

Wir gehen zunächst von einer meßbaren Menge  $E \subset \Omega$  aus und definieren

$$M := \{v \in V ; v \geq 1 \text{ fast überall auf } E \}$$

und nehmen an, daß es ein Element  $u_0 \in M$  gibt. Nach (2.5.1) erfüllt dann  $A : M \rightarrow V^*$  die Stetigkeitsbedingung (2.1.3), und nach (2.6.1) gibt es höchstens eine Lösung  $u \in M$  der Variationsungleichung

$$0 \geq \langle u - v, A(u) \rangle = \int_{\Omega} \nabla(u - v) \cdot \nabla_p u \quad \text{für alle } v \in M.$$

Die Existenz einer Lösung folgt aus Satz 2.1, da  $A$  offensichtlich beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet, und da die Koerzivitätsbedingung bzgl.  $u_0$  erfüllt ist, denn für  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\begin{aligned} (z_1 - z_0) \cdot (|z_1|^{p-2} z_1) &\geq |z_1|^p - |z_0| |z_1|^{p-1} \\ &\geq \frac{1}{2} |z_1|^p - C |z_0|^p, \end{aligned}$$

also

$$\langle u - u_0, A(u) \rangle \geq \frac{1}{2} \|u\|_V^p - C \|u_0\|_V^p .$$

Die eindeutige Lösung der Variationsungleichung ist auch das eindeutige absolute Minimum von  $v \mapsto \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p$  auf  $M$ . Denn für  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$  gilt mit  $z_t := (1-t)z_0 + tz_1$

$$|z_1|^p - |z_0|^p = p \int_0^1 |z_t|^{p-2} z_t dt \cdot (z_1 - z_0) .$$

Wegen der strikten Monotonie in (2.6.5) ist dies, falls  $z_1 \neq z_0$ ,

$$> p |z_0|^{p-2} z_0 \cdot (z_1 - z_0) ,$$

so daß also für  $v \in M$ , falls  $v \neq u$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p > p \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(v - u) \cdot \nabla_p u \geq 0 .$$

Setzen wir speziell  $v = \max(0, \min(1, u))$ , so erhalten wir, daß fast überall  $0 \leq u \leq 1$ . Also ist  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  (im Falle  $p = n$  entsprechend der Wahl von  $q$  in der Formulierung des Satzes). Ist nun  $E \subset \Omega$  offen, so stimmt die Menge  $M = M_{q,p}(E, \Omega)$  mit derjenigen Menge überein, über die in 3.3 das Infimum zur Berechnung der Kapazität gebildet wurde. Insbesondere ist  $\text{cap}_p(E, \Omega) < \infty$  äquivalent zu  $M \neq \emptyset$ . Dies beweist die Behauptung.  $\square$

**3.6 Beispiel.** Wir berechnen die Kapazität einer inneren Kugel  $E := B_R \subset \mathbb{R}^n$  bzgl. einer äußeren Kugel  $\Omega := B_{R_0}$  mit gleichem Mittelpunkt  $x_0$ , wobei  $1 < p \leq n$  und  $n \geq 2$ . Das zugehörige Potential  $\varphi$  erfüllt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla_p \varphi &= 0 && \text{in } B_{R_0} \setminus B_R, \\ \varphi &= 1 && \text{auf } \partial B_R, \\ \varphi &= 0 && \text{auf } \partial B_{R_0}. \end{aligned}$$

Ist  $\varphi(x - x_0) = \psi(|x - x_0|)$  mit einer fallenden Funktion  $\psi$ , so ist zu lösen

$$(r^{n-1} \psi'(r)^{p-1})' = 0 ,$$

was ergibt

$$\psi(r) = \frac{\psi_{n,p}(\frac{r}{R_0})}{\psi_{n,p}(\frac{R}{R_0})}$$

mit

$$\psi_{n,p}(r) := \begin{cases} \frac{p-1}{n-p} (r^{-\frac{n-p}{p-1}} - 1) & \text{für } 1 < p < n, \\ \log \frac{1}{r} & \text{für } p = n, \end{cases}$$

so daß also  $\psi_{n,p}(1) = 0$  und

$$\psi'_{n,p}(r) = -r^{-\frac{n-1}{p-1}} .$$

Damit berechnet sich, wenn  $\sigma_n := \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1)$ ,

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(B_R, B_{R_0}) &= \int_{B_{R_0} \setminus B_R} |\nabla \varphi|^p = \sigma_n \int_R^{R_0} r^{n-1} |\psi'(r)|^p dr \\ &= \sigma_n \begin{cases} \left( \frac{p-1}{n-p} \left( R^{-\frac{n-p}{p-1}} - R_0^{-\frac{n-p}{p-1}} \right) \right)^{1-p} & \text{für } 1 < p < n, \\ \left( \log \frac{1}{R} - \log \frac{1}{R_0} \right)^{1-n} & \text{für } p = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Im Spezialfall  $p = 2$  ist dies

$$\begin{aligned} \sigma_n(n-2) \left( R^{-(n-2)} - R_0^{-(n-2)} \right)^{-1} & \quad \text{für } n \geq 3, \\ \sigma_n \left( \log \frac{1}{R} - \log \frac{1}{R_0} \right)^{-1} & \quad \text{für } n = 2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für  $n = 3$  als wohlbekannte Formel für die Kapazitätskoeffizienten zwischen zwei konzentrischen Kugeln

$$\frac{4\pi R R_0}{R_0 - R} \quad (\rightarrow 4\pi R \quad \text{für } R_0 \rightarrow \infty),$$

und im Falle  $n = 2$  für den Kapazitätskoeffizienten zwischen zwei konzentrischen Zylindern pro Längeneinheit

$$\frac{2\pi}{\log \frac{R_0}{R}}.$$

Im allgemeinen ergibt sich für  $1 < p < n$  und  $R_0 \rightarrow \infty$

$$\text{cap}_p(B_R, \mathbb{R}^n) = \sigma_n \left( \frac{p-1}{n-p} \right)^{1-p} R^{n-p}.$$

Ein Vergleich mit der Konstruktion des  $(n-p)$ -dimensionalen Hausdorff-Maßes legt damit nahe, die Kapazität  $\text{cap}_p$  im  $\mathbb{R}^n$  mit  $(n-p)$ -dimensionalen Maßen in Verbindung zu bringen, obwohl betont sei, daß  $\text{cap}_p$  selbst kein Maß ist (siehe (3.8.6)). Wir tun dies, indem wir die normierte Größe

$$\text{cap}_p(E, \mathbb{R}^n)^{\frac{1}{n-p}}$$

betrachten. Wir beweisen (ohne Benutzung von Satz 3.5)

**3.7 Lemma.** Sei  $1 \leq p \leq n$  und  $E$  eine beschränkte Teilmenge von  $\Omega$ , sowie  $\Omega \subset \Omega'$  offen, wobei  $\Omega'$  im Falle  $p = n$  beschränkt sei. Dann gilt:

(3.7.1) Falls  $E \subset D \subset \subset \Omega$ , so ist

$$\text{cap}_p(E, \Omega') \leq \text{cap}_p(E, \Omega) \leq \begin{cases} C(\Omega, D) \text{cap}_p(E, \Omega') & \text{für } p < n, \\ C(\Omega, D, \Omega') \text{cap}_p(E, \Omega') & \text{für } p = n. \end{cases}$$

(3.7.2) Für  $1 \leq \tilde{p} < p < n$  ist

$$\text{cap}_{\tilde{p}}(E, \Omega)^{\frac{1}{n-\tilde{p}}} \leq C(n, p) \text{cap}_p(E, \Omega)^{\frac{1}{n-p}}.$$

(3.7.3) Es gibt eine Borelmenge  $\tilde{E} \supset E$ , so daß

$$\mathcal{L}^n(\tilde{E})^{\frac{1}{n}} \leq \begin{cases} C(n, p) \text{cap}_p(E, \Omega')^{\frac{1}{n-p}} & \text{für } p < n, \\ C(n, p, \alpha, \Omega') \text{cap}_p(E, \Omega')^\alpha & \text{für } p = n, 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

(3.7.4) Falls  $E \subset \text{graph}(\gamma) \cap D$  mit  $D \subset\subset \Omega'$  und  $\gamma \in C^{0,1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ , so gibt es eine Borelmenge  $\tilde{E}$  mit  $E \subset \tilde{E} \subset \text{graph}(\gamma)$ , so daß

$$\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{E})^{\frac{1}{n-1}} \leq \begin{cases} C(n, p, \gamma, D) \text{cap}_p(E, \Omega')^{\frac{1}{n-p}} & \text{für } p < n, \\ C(n, p, \gamma, D, \alpha, \Omega') \text{cap}_p(E, \Omega')^\alpha & \text{für } p = n, 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

*Beweis.* Die erste Ungleichung in (3.7.1) ist offensichtlich, da die Menge, über die das Infimum gebildet wird, eingeschränkt wird, falls man  $\Omega'$  durch  $\Omega$  ersetzt. Zum Beweis der zweiten Ungleichung sei  $d := \text{dist}(D, \partial\Omega) > 0$ . Wir können annehmen, daß  $d < \infty$ . Mit  $\tilde{D} := B_d(D)$  wähle eine Abschneidefunktion  $\eta \in C_0^\infty(\tilde{D})$  mit  $\eta = 1$  auf  $D$  und  $|\nabla\eta| \leq \frac{C}{d}$ . Für  $u \in H^{1,p}(\Omega')$  aus der Definition von  $\text{cap}_p(E, \Omega')$  setze  $v := \eta u$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(E, \Omega) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p \\ &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + \frac{1}{d^p} \int_{\{u \neq 0\}} |u|^p \right). \end{aligned}$$

Ist nun  $p < n$ , so schätzt man das letzte Integral mit  $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$  zunächst mit der Hölderungleichung gegen die  $L^q$ -Norm von  $u$  und dann mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz auf  $\mathbb{R}^n$  gegen die  $L^p$ -Norm von  $\nabla u$  ab. Man erhält

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \cdot \left( 1 + \left( \frac{\mathcal{L}^n(\tilde{D})^{\frac{1}{n}}}{d} \right)^p \right),$$

was die gewünschte Ungleichung zur Folge hat. Im Falle  $p = n$  schätze mit  $1 < q < \infty$  zunächst wieder gegen die  $L^q$ -Norm von  $u$  ab, was den Faktor  $\mathcal{L}^n(\tilde{D})^{\frac{1}{n} - \frac{1}{q}}$  ergibt, und verwende dann den Sobolev'schen Einbettungssatz auf der beschränkten Menge  $\Omega'$  unter Ausnutzung von  $u = 0$  außerhalb  $\Omega'$ .

Zum Beweis von (3.7.2) sei  $u \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  mit  $u \geq 1$  auf einer offenen Obermenge  $D$  von  $E$ , und setze  $v := \max(2u - 1, 0)$ . Dann ist  $v \geq 1$  auf  $D$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{\tilde{p}} = 2^{\tilde{p}} \int_{\{u \geq \frac{1}{2}\}} |\nabla u|^{\tilde{p}} \leq 2^{\tilde{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \right)^{\frac{\tilde{p}}{p}} \cdot \mathcal{L}^n \left( \left\{ u \geq \frac{1}{2} \right\} \right)^{1 - \frac{\tilde{p}}{p}}$$

Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz ist, wenn  $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$ ,

$$\mathcal{L}^n \left( \left\{ u \geq \frac{1}{2} \right\} \right) \leq 2^q \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \leq C(n, p) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \right)^{\frac{q}{p}},$$

also gilt wegen  $\frac{\tilde{p}}{p} + (1 - \frac{\tilde{p}}{p}) \frac{q}{p} = \frac{n - \tilde{p}}{n - p}$

$$\text{cap}_{\bar{p}}(E, \Omega) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{\bar{p}} \leq C(n, p) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \right)^{\frac{n-\bar{p}}{n-p}},$$

was (3.7.2) impliziert.

Für (3.7.3) wähle  $u_i \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  aus der Definition von  $\text{cap}_p(E, \Omega')$  mit  $u_i \geq 1$  auf einer offenen Menge  $D_i \supset E$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \rightarrow \text{cap}_p(E, \Omega') \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Falls  $p < n$  gilt dann mit  $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$  nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz auf  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}^n(D_i) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_i|^q \leq C \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \right)^{\frac{q}{p}},$$

also wegen  $\frac{q}{p} = \frac{n}{n-p}$  und mit  $\tilde{E} := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} D_i$

$$\mathcal{L}^n(\tilde{E}) \leq C \cdot \text{cap}_p(E, \Omega')^{\frac{n}{n-p}}.$$

Im Falle  $p = n$  verwende für  $1 < q < \infty$  wieder den Einbettungssatz auf der beschränkten Menge  $\Omega'$  und erhalte

$$\mathcal{L}^n(\tilde{E}) \leq C(q, \Omega') \text{cap}_p(E, \Omega')^{\frac{q}{p}}.$$

Für die Behauptung setze dann  $\alpha = \frac{q}{pn}$ .

Der Beweis von (3.7.4) ist analog unter Verwendung des Einbettungssatzes von  $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  auf  $L^{q'}(\text{graph}(\gamma) \cap D)$  mit  $1 - \frac{n}{p} = \frac{n-1}{q'}$ . Wähle dazu eine Abschneidefunktion  $\eta \in C_0^\infty(\Omega')$  mit  $\eta = 1$  auf  $\tilde{D}$ . Dann ist mit  $u_i$  wie oben

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\text{graph}(\gamma) \cap D_i) &\leq \int_{\text{graph}(\gamma) \cap D_i} |\eta u_i|^{q'} \\ &\leq C(\text{supp } \eta) \|\eta u_i\|_{H^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^{q'} \\ &\leq C(\eta) \left( \|u_i\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{q'}, \end{aligned}$$

wobei wie oben  $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$ . Dann folgt die Behauptung wie bei (3.7.3) unter Ausnutzung von  $\frac{q'}{p} = \frac{n-1}{n-p}$ . Im Falle  $p = n$  gehe analog vor.  $\square$

Es ist wichtig zu bemerken, daß der Satz 3.5 für den Fall  $p = 1$  falsch ist, d.h. dann wird die Kapazität als Infimum für keine  $H^{1,1}$ -Funktion angenommen. In diesem Fall muß man vielmehr zum größeren Raum der Funktionen mit beschränkter Variation übergehen. Dieser Raum stellt den Abschluß des  $H^{1,1}$ -Raumes bzgl. der Norm  $u \rightarrow \|\nabla u\|_{L^1}$  dar.

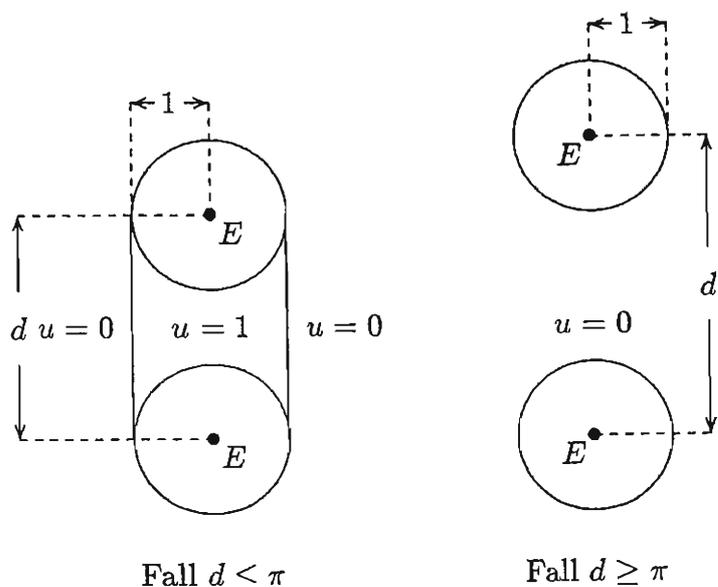


Bild 3.4: Kapazitätspotential im Fall  $p = 1, n = 2$ .

Wir werden hier die Existenz eines absoluten Minimums  $u$  im Raum der Funktionen mit beschränkter Variation nicht nachweisen (vgl. hierzu auch Abschnitt 6), jedoch sei bemerkt, dass für solche absoluten Minima, wobei im allgemeinen mehrere existieren können,  $\partial\{u = 1\}$  außerhalb  $\overline{E}$  eine Minimalfläche, d.h. eine Fläche mit mittlerer Krümmung 0 ist. Im Falle  $n = 2$  handelt es sich also um Geradenstücke. Dies ergibt den folgenden Satz.

**3.8 Satz.** Im Fall  $p = 1, n = 2$  gilt für jede offene, beschränkte und zusammenhängende Menge  $E \subset \mathbb{R}^2$

$$\text{cap}_1(E, \mathbb{R}^2) = \mathcal{H}^1(\partial \text{conv}(E)),$$

wobei  $\text{conv}(E)$  die konvexe Hülle von  $E$  bezeichnet.

*Beweis.* Für große Teile des Beweises sei  $n \geq 2$  beliebig. Definiere  $K := \text{conv}(E)$ , wobei ohne Einschränkung  $0 \in K$ . Da  $E$  offen ist, hat  $K$  einen Lipschitz-Rand, genauer

$$K = \{r\xi; |\xi| = 1 \text{ und } 0 \leq r < g(\xi)\}$$

mit einer Lipschitz-Abbildung  $g : \partial B_1(0) \rightarrow ]0, \infty[$ . Zunächst zeigen wir, dass  $\text{cap}_1(E, \mathbb{R}^n) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial K)$ . Dazu definiere

$$u_\delta := \min\left(1, \max\left(0, 1 - \frac{r - g(\xi)}{\delta}\right)\right) \quad \text{für } x = r\xi \text{ mit } |\xi| = 1.$$

Dann ist für  $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\text{cap}_1(E, \mathbb{R}^n) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\delta| = \frac{1}{\delta} \iint_{\{0 < r - g(\xi) < \delta\}} r^{n-1} \sqrt{1 + \left| \frac{1}{r} \nabla_\xi g(\xi) \right|^2} d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) dr \\
&\rightarrow \int g(\xi)^{n-1} \sqrt{1 + \left| \frac{1}{g(\xi)} \nabla_\xi g(\xi) \right|^2} d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) \\
&= \mathcal{H}^{n-1}(\partial K).
\end{aligned}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung zeigen wir zunächst folgende Hilfsbehauptung: Ist

$$D := \{(y, z) ; y \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{und} \quad z > \gamma(y)\}$$

mit einer Lipschitz-Abbildung  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , die konkav ist, so gilt für jede nichtnegative Funktion  $u \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger

$$(3.8.1) \quad \int_D |\nabla u| \geq \int_{\partial D} u d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Zum Beweis sei  $\gamma_\rho$  eine glatte Faltung von  $\gamma$ , die dann auch konkav ist. Damit ist

$$d_\rho(x) := \text{dist}(x, \partial D_\rho) \quad \text{mit} \quad D_\rho := \{z > \gamma_\rho(y)\}$$

eine konvexe Funktion in  $D_\rho$ , somit subharmonisch. Außerdem gilt  $\partial_\nu d_\rho = -1$  auf  $\partial D_\rho$  und  $|\nabla d_\rho| \leq 1$  in  $D_\rho$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{D_\rho} |\nabla u| &\geq - \int_{D_\rho} \nabla u \cdot \nabla d_\rho = \int_{\partial D_\rho} u \partial_{-\nu} d_\rho d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{D_\rho} u \Delta d_\rho \\
&\geq \int_{\partial D_\rho} u d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(\cdot, \gamma_\rho) \sqrt{1 + |\nabla \gamma_\rho|^2} d\mathcal{L}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Da  $\nabla \gamma_\rho \rightarrow \nabla \gamma$  fast überall für  $\rho \rightarrow 0$ , folgt (3.8.1).

Wir gehen nun aus von einer Minimalfolge  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , d.h. Funktionen  $u_i \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger und  $0 \leq u_i \leq 1$ , so daß  $u_i = 1$  auf  $E$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i| \leq \text{cap}_1(E, \mathbb{R}^n) + \varepsilon_i$$

mit  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ . Wir zeigen, daß wir  $u_i$  so wählen können, daß mit einer gegebenen Folge  $\rho_i \rightarrow 0$  gilt

$$(3.8.2) \quad \text{supp}(u_i) \subset B_{\rho_i}(K).$$

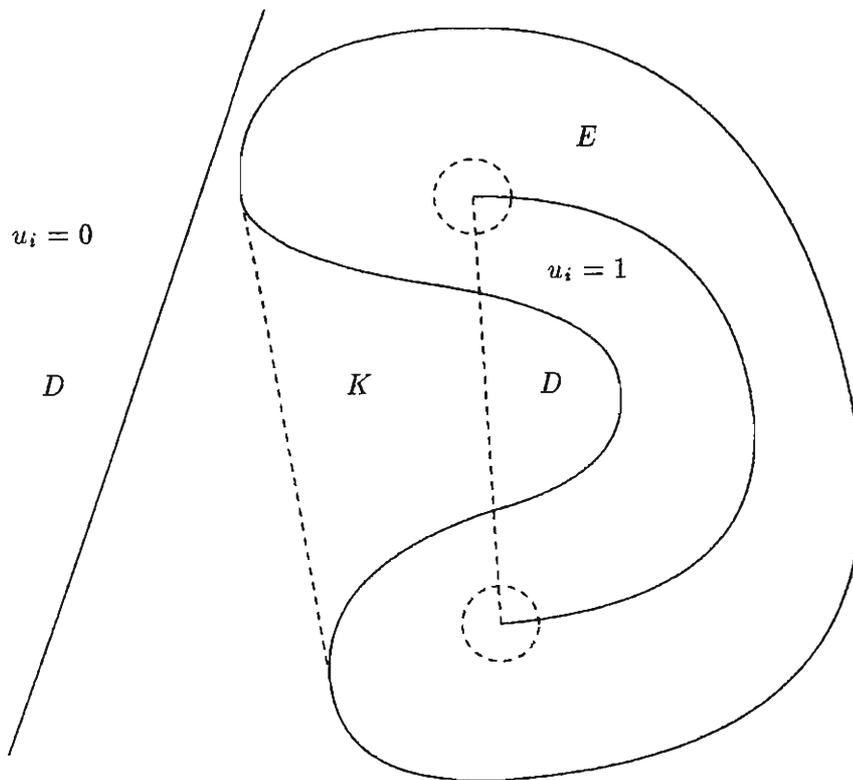


Bild 3.5: Geometrische Konstruktionen zum Beweis von 3.8.

Sei dazu  $D$  eine Hyperebene außerhalb von  $K$ , wobei ohne Einschränkung

$$D = \{(y, z) ; y \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ und } z > 0\} ,$$

und für  $\delta > 0$  definiere

$$\eta_\delta(y, z) := \min\left(1, \max\left(0, 1 - \frac{z}{\delta}\right)\right) .$$

Für jede Funktion  $u \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger gilt dann für  $\delta \rightarrow 0$

$$(3.8.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\eta_\delta u)| \leq \int_{\{z < \delta\}} |\nabla u| + \frac{1}{\delta} \int_{\{0 < z < \delta\}} |u| \\ \rightarrow \int_{\{z < 0\}} |\nabla u| + \int_{\partial D} |u| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|$$

nach (3.8.1). Für festes  $i$  wählen wir nun endlich viele solcher Hyperebenen  $D_j$  mit  $j = 1, \dots, m$ , so daß

$$\bigcap_j B_{\frac{\rho_i}{2}}(\mathbb{R}^n \setminus D_j) \subset B_{\rho_i}(K) .$$

Mit zugehörigen Abschneidefunktionen  $\eta_{j,\delta_j}$  und Zahlen  $\delta_j < \frac{\rho_i}{2}$  definiere induktiv

$$v_j := \eta_{j,\delta_j} v_{j-1} \quad \text{mit} \quad v_0 := u ;$$

und wähle  $\delta_j$  so klein, daß nach (3.8.3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_j| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_{j-1}| + \frac{\varepsilon_j}{m}.$$

Die Funktion  $\tilde{u}_i := v_m$  hat dann Träger in  $B_{\rho_i}(K)$  und erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}_i| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i| + \varepsilon_i \leq \text{cap}_1(E, \mathbb{R}^n) + 2\varepsilon_i.$$

Ersetze nun  $u_i$  durch  $\tilde{u}_i$ . Ähnlich, wie wir auf diese Weise  $\{u_i > 0\}$  verkleinert haben, möchten wir nun  $\{u_i < 1\}$  vergrößern. Aus geometrischen Gründen ist dies jedoch, wie erwartet, nur im Falle  $n = 2$  möglich. Wir zeigen also, daß wir  $u_i$  so wählen können, daß

$$(3.8.4) \quad \text{supp}(1 - u_i) \subset B_{\rho_i}(\mathbb{R}^n \setminus K).$$

Dazu gehen wir von zwei Kugeln  $B_\rho(x_\pm) \subset E$  aus, wobei ohne Einschränkung  $x_\pm = (\pm 1, 0)$  und  $\rho \ll 1$ . Da  $E$  zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve  $\tau : [0, 1] \rightarrow E$  die  $x_+$  mit  $x_-$  verbindet. Ohne Einschränkung bilde  $\tau$  zusammen mit der Strecke von  $x_-$  nach  $x_+$  ein Gebiet  $D$  (siehe Bild 3.5). Mit  $\eta_\delta$  wie oben sei dann für jede Funktion  $u \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $u = 1$  in  $E$

$$u_\delta := \begin{cases} 1 - \eta_\delta(1 - u) & \text{in } D, \\ u & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir argumentieren dann analog zu (3.8.3) und erhalten mit einer ähnlichen Iteration, unter Ausnutzung der Eigenschaft  $K = \text{conv}(E)$ , die Behauptung (3.8.4). Wir können also annehmen, daß für die modifizierte Minimalfolge  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i| \leq \text{cap}_1(E, \mathbb{R}^n) + 3\varepsilon_i, \\ \{0 < u_i < 1\} \subset B_{\rho_i}(\partial K).$$

Mit der konvexen Menge

$$K_\delta := \{r\xi ; |\xi| = 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq r < (1 - \delta)g(\xi)\}$$

ist dann  $u_i = 1$  auf  $K_\delta$  für große  $i$ , somit nach (3.8.1)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i| \geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial K_\delta) \rightarrow \mathcal{H}^{n-1}(\partial K)$$

für  $\delta \rightarrow 0$ . Damit ist der Satz bewiesen. □

In Satz 3.5 war die Existenz eines Kapazitätspotentials für  $1 < p \leq n$  auf offenen Mengen bewiesen worden. Das Ziel der folgenden Untersuchung ist es, diese Aussage auf allgemeine beschränkte Mengen zu verallgemeinern, was in 3.15 gelingen wird. Dazu ist es erforderlich, die maßtheoretischen Eigenschaften der Kapazität zu studieren. Wir werden sehen, daß die Kapazität alle Eigenschaften eines Maßes trägt mit Ausnahme der Additivität.

Die Nichtadditivität sehen wir wie folgt ein, wobei wir den Fall  $p = 2 < n$  mit  $\Omega = \mathbb{R}^n$  betrachten. Sind  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit glattem Rand und  $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = \emptyset$  und  $\varphi_{E_i}$  die zugehörigen Kapazitätspotentiale, so gilt

$$(3.8.5) \quad \begin{aligned} \text{cap}_p(E_1) + \text{cap}_p(E_2) &\geq \int_{\{\varphi_{E_1} \geq \varphi_{E_2}\}} |\nabla \varphi_{E_1}|^2 + \int_{\{\varphi_{E_1} < \varphi_{E_2}\}} |\nabla \varphi_{E_2}|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \max(\varphi_{E_1}, \varphi_{E_2})|^2 \geq \text{cap}_p(E_1 \cup E_2), \end{aligned}$$

denn  $\max(\varphi_{E_1}, \varphi_{E_2})$  ist zulässig für die Kapazität von  $E := E_1 \cup E_2$ . Nun sind  $\varphi_{E_i}$  harmonisch in  $\Omega \setminus \overline{E}_i$ , also ist  $\max(\varphi_{E_1}, \varphi_{E_2})$  subharmonisch in  $\Omega \setminus \overline{E}$  mit denselben Randwerten wie  $\varphi_E$ . Da  $\varphi_E$  harmonisch in  $\Omega \setminus \overline{E}$  ist, folgt also  $\varphi_E \geq \max(\varphi_{E_1}, \varphi_{E_2})$ . Darüberhinaus ist  $\varphi_{E_j} > \varphi_{E_i}$  für  $j \neq i$  nahe  $\partial E_i$ , jedenfalls wenn  $\Omega \setminus \overline{E}_i$  zusammenhängend sind. Daher kann  $\max(\varphi_{E_1}, \varphi_{E_2})$  nicht harmonisch in  $\Omega \setminus \overline{E}$  sein und stimmt daher nicht mit dem absoluten Minimum  $\varphi_E$  des Variationsproblems für  $E$  überein. Daher ist die letzte Ungleichung in (3.8.5) eine echte und wir haben gezeigt, daß

$$(3.8.6) \quad \text{cap}_p(E_1) + \text{cap}_p(E_2) > \text{cap}_p(E_1 \cup E_2).$$

Wir beweisen die folgenden Aussagen:

**3.9 Elementare Eigenschaften.** Es sei  $1 \leq p \leq n$  und für (3.9.2) - (3.9.4) sei  $p > 1$ . Dann gilt:

(3.9.1) Für beschränkte Mengen  $E_1 \subset E_2 \subset \Omega$  ist (Monotonie)

$$\text{cap}_p(E_1, \Omega) \leq \text{cap}_p(E_2, \Omega).$$

(3.9.2) Für  $E_i \subset \Omega$ ,  $i \in N \subset \mathbb{N}$ , mit beschränktem  $E := \bigcup_{i \in N} E_i$  ist (Subadditivität)

$$\text{cap}_p(E, \Omega) \leq \sum_{i \in N} \text{cap}_p(E_i, \Omega).$$

(3.9.3) Für offene  $D_i \subset D_{i+1} \subset \Omega$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , mit beschränktem  $D := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$  ist

$$\text{cap}_p(D, \Omega) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{cap}_p(D_i, \Omega).$$

(3.9.4) Für jede offene beschränkte Menge  $D \subset \Omega$  ist (innere Kapazität)

$$\text{cap}_p(D, \Omega) = \sup \{ \text{cap}_p(K, \Omega) ; K \subset D \text{ kompakt} \}.$$

(3.9.5) Für jede beschränkte Menge  $E \subset \Omega$  ist (äußere Kapazität)

$$\text{cap}_p(E, \Omega) = \inf \{ \text{cap}_p(D, \Omega) ; E \subset D \text{ offen beschränkt} \}.$$

*Beweis.* Die Aussagen (3.9.1) und (3.9.5) folgen unmittelbar aus der Definition der (äußeren) Kapazität in 3.1. Zum Beweis von (3.9.3) wählen wir  $u_i \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  gemäß 3.1 mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \leq c_i + \varepsilon \quad , \text{ wobei } c_i := \text{cap}_p(E_i, \Omega),$$

und so daß  $u_i \geq 1$  auf  $D_i$ . Ohne Einschränkung sei  $0 \leq u_i \leq 1$ , sonst gehe zu  $\max(0, \min(1, u_i))$  über. Mit  $q$  wie in (3.4.1) und dem Einbettungssatz im Falle  $p < n$  ist dann

$$\begin{aligned} \|u_i\|_{L^q}^p &\leq \max\left(1, C\|\nabla u_i\|_{L^p}^p\right) \\ &\leq C(c_i + 1) \end{aligned}$$

für  $\varepsilon \leq 1$ . Nun wähle  $R_0 > 0$  mit  $D \subset B_{R_0}(0)$  und für  $R > R_0$  seien  $u_{iR} \in \dot{H}^{1,p}(B_R(0))$  die Approximationen aus 3.4, für die also mit  $0 < \delta \leq 1$

$$\|\nabla u_{iR}\|_{L^p}^p \leq (1 + \delta)c_i + 2\varepsilon + C_\delta(c_i + 1) \cdot \left(\log \frac{R}{R_0}\right)^{-\frac{p(n-1)}{n}}.$$

Nun ist  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  nach (3.9.1) eine monotone Folge, und falls sie unbeschränkt ist, folgt  $\text{cap}_p(D, \Omega) = \infty$  nach (3.9.1). Wir können also annehmen, daß sie beschränkt ist. Dann ist  $(u_{iR})_{i \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $H^{1,p}(B_R(0))$ , hat somit, da  $p > 1$ , für eine Teilfolge  $i \rightarrow \infty$  einen Grenzwert

$$\begin{aligned} u_{iR} &\rightarrow u_R && \text{schwach in } H^{1,p}(B_R(0)), \\ u_{iR} &\rightarrow u_R && \text{fast überall in } B_R(0). \end{aligned}$$

Da  $u_i = 1$  auf  $D_i$  erhalten wir, daß  $u_R = 1$  auf  $D$ . Daher ist  $u_R$  zulässig für die Kapazität der Menge  $D$ , d.h.

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(D, \Omega) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R|^p \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{iR}|^p \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} c_i + 3\varepsilon, \end{aligned}$$

wenn wir oben erst  $\delta$  und dann  $R$  geeignet in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  wählen. Dies beweist (3.9.3).

Als Anwendung beweisen wir (3.9.2). Wähle dazu  $u_i$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \leq c_i + \varepsilon \cdot 2^{-i},$$

wobei  $c_i := \text{cap}_p(E_i, \Omega)$  und  $u_i \geq 1$  auf einer offenen Menge  $D_i \supset E_i$ . Da die  $E_i$  gleichmäßig beschränkt sind, können wir auch  $D_i$  so wählen. Nun sei

$$\tilde{u}_j(x) := \max\{u_i(x) ; 1 \leq i \leq j\} \quad \text{und} \quad \tilde{D}_j := \bigcup_{1 \leq i \leq j} D_i.$$

Dann ist  $\tilde{u}_j \geq 1$  auf der offenen Menge  $\tilde{D}_j$  und daher

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}_p(\tilde{D}_j, \Omega) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}_j|^p \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq j} \int_{\{\tilde{u}_j = u_i\}} |\nabla \tilde{u}_j|^p \leq \sum_{1 \leq i \leq j} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq j} (c_i + \varepsilon 2^{-i}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach (3.9.3) folgt dann

$$\operatorname{cap}_p\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{D}_j, \Omega\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{cap}_p(\tilde{D}_j, \Omega) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i + \varepsilon$$

und nach (3.9.1)

$$\operatorname{cap}_p(E, \Omega) \leq \operatorname{cap}_p\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{D}_j, \Omega\right).$$

Lasse dann  $\varepsilon \rightarrow 0$  streben.

Zum Beweis von (3.9.4) wähle eine Ausschöpfung  $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $D$  mit offenen Mengen  $D_i \subset\subset D_{i+1}$ . Nach (3.9.3) ist dann

$$\operatorname{cap}_p(D, \Omega) = \lim_{i \rightarrow \infty} \operatorname{cap}_p(D_i, \Omega)$$

und da  $\overline{D}_i$  kompakte Mengen mit  $D_i \subset \overline{D}_i \subset \Omega$  sind, folgt die Behauptung mit (3.9.1).  $\square$

Für das weitere Vorgehen benötigen wir den Begriff der lokal fast stetigen Funktionen.

**3.10 Definition.** Sei  $\mathcal{M}$  ein Mengensystem auf  $\Omega$ , das alle beschränkten offenen Teilmengen von  $\Omega$  enthält, und für das gilt:

$$(3.10.1) \quad E_1, E_2 \in \mathcal{M} \implies E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{M}.$$

Weiter sei  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\mu(\emptyset) = 0$  sei monoton, d.h.

$$(3.10.2) \quad \mu(E_1) \leq \mu(E_2) \quad \text{für } E_1, E_2 \in \mathcal{M} \text{ mit } E_1 \subset E_2,$$

und subadditiv, d.h.

$$(3.10.3) \quad \mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) \quad \text{für } E_1, E_2 \in \mathcal{M}.$$

Dann ist der Vektorraum der bezüglich  $\mu$  fast stetigen Funktionen definiert durch

$C_\mu(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; \text{ Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es eine Menge } E \subset \Omega \text{ mit}$   
 $\mu(D \cap E) \leq \varepsilon \text{ für jedes beschränkte offene } D \subset \Omega,$   
 $E \text{ ist offen,}$   
 $\text{die Einschränkung von } u \text{ auf } \Omega \setminus E \text{ ist stetig } \}$

mit der Äquivalenzrelation

$$u_1 = u_2 \quad \text{in } C_\mu(\Omega) \quad :\iff \quad \{u_1 \neq u_2\} \quad \text{ist eine } \mu\text{-Nullmenge.}$$

Dabei ist  $E$  eine  $\mu$ -Nullmenge, falls es zu  $\varepsilon > 0$  Mengen  $E_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$ , gibt, so daß

$$E \subset \bigcup_i E_i \quad \text{und} \quad \sum_i \mu(E_i) \leq \varepsilon .$$

Im Spezialfall  $\mu = \text{cap}_p(\cdot, \Omega)$  (siehe (3.9.2)) schreiben wir  $C_p(\Omega)$  statt  $C_{\text{cap}_p}(\Omega)$ . In diesem Fall ist  $\mathcal{M}$  die Menge der beschränkten Teilmengen von  $\Omega$ . Für  $u_1, u_2 \in C_p(\Omega)$  sagen wir (zum Beispiel)

$$u_1 = u_2 \quad \text{cap}_p\text{-fast überall} \quad :\iff \quad u_1 = u_2 \quad \text{in } C_p(\Omega) .$$

Im Spezialfall  $\mu = \mathcal{L}^n$  ist  $C_{\mathcal{L}^n}(\Omega)$  nach dem Satz von Lusin der Raum der Lebesgue-meßbaren Funktionen.

Die folgenden beiden Aussagen sind entscheidend für die weiteren Untersuchungen.

**3.11 Lemma.** Für  $u_1, u_2 \in C_p(\Omega)$  mit  $1 < p \leq n$  gilt:

$$u_1 = u_2 \quad \text{cap}_p\text{-fast überall} \quad \iff \quad u_1 = u_2 \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall} .$$

Darüberhinaus ist jede  $\text{cap}_p$ -Nullmenge eine  $\mathcal{L}^n$ -Nullmenge.

*Beweis.* Sei  $u_1 = u_2$   $\text{cap}_p$ -fast überall. Dann ist  $N := \{u_1 \neq u_2\}$  eine  $\text{cap}_p$ -Nullmenge. Wir haben zu zeigen, daß  $\mathcal{L}^n(N) = 0$ . Dazu sei aus der Definition in 3.10

$$N \subset \bigcup_i E_i \quad \text{mit} \quad \sum_i \text{cap}_p(E_i, \Omega) \leq \varepsilon .$$

Nach (3.7.3) gilt dann mit einem  $\beta > 1$  und Mengen  $E_i \subset \tilde{E}_i$  für jedes  $D \subset \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{L}^n(D \cap \tilde{E}_i) &\leq C \sum_i \text{cap}_p(D \cap E_i, \Omega)^\beta \\ &\leq C \text{cap}_p(D, \Omega)^{\beta-1} \sum_i \text{cap}_p(E_i, \Omega) \\ &\leq C(D, \beta) \cdot \varepsilon , \end{aligned}$$

da  $\text{cap}_p(D, \Omega) < \infty$ . Dies zeigt  $\mathcal{L}^n(D \cap N) = 0$ , und damit auch  $\mathcal{L}^n(N) = 0$ .

Ist umgekehrt  $u_1 = u_2$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall, so setze  $u := |u_1 - u_2|$ . Dann ist  $u \in C_p(\Omega)$ , denn zu  $\varepsilon > 0$  gibt es abgeschlossene Mengen  $S_{\varepsilon,j}$  in  $\Omega$  mit  $\text{cap}_p(D \setminus S_{\varepsilon,j}) \leq \varepsilon$  für jedes beschränkte offene  $D \subset \Omega$ , so daß  $u_j$  stetig ist auf  $S_{\varepsilon,j}$ . Dann ist  $u$  stetig auf  $S_\varepsilon := S_{\varepsilon,1} \cap S_{\varepsilon,2}$  und  $\text{cap}_p(D \setminus S_\varepsilon) \leq 2\varepsilon$  wegen der Subadditivität in (3.9.2). Also folgt  $u \in C_p(\Omega)$ . (Diese Schlußweise wird auch beim Beweis, daß  $C_p(\Omega)$  ein Vektorraum ist, benutzt.) Für  $\delta > 0$  sind nun durch

$$K_\varepsilon^\delta := \{x \in S_\varepsilon ; u(x) \geq \delta\}$$

in  $\Omega$  relativ abgeschlossene Mengen definiert. Da  $u$  auf  $S_\varepsilon$  stetig ist, gibt es zu  $x \in K_\varepsilon^\delta$  einen Radius  $r_x > 0$  mit  $u \geq \frac{\delta}{2}$  auf  $B_{r_x}(x) \cap S_\varepsilon$ . Da  $K_\varepsilon^\delta$  lokal kompakt ist, gibt es daher eine abzählbare Überdeckung mit solchen Kugeln, d.h.

$$K_\varepsilon^\delta \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_{\varepsilon,i}^\delta \quad \text{mit} \quad D_{\varepsilon,i}^\delta := B_{r_{x_i}}(x_i) .$$

Mit  $D_\varepsilon := \Omega \setminus S_\varepsilon$  ist dann

$$(3.11.1) \quad \{u \geq \delta\} \subset D_\varepsilon \cup K_\varepsilon^\delta \subset D_\varepsilon \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_{\varepsilon,i}^\delta =: D_\varepsilon^\delta ,$$

was eine offene Teilmenge von  $\Omega$  darstellt.

Nun sei  $v \in M_{q,p}(D \cap D_\varepsilon, \Omega)$  aus der Darstellung von  $\text{cap}_p(D \cap D_\varepsilon, \Omega)$  in 3.3, also  $v \geq 1$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall auf  $D \cap D_\varepsilon$ . Da  $u = 0$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall und  $u \geq \frac{\delta}{2} > 0$  in  $D_{\varepsilon,i}^\delta \cap S_\varepsilon$ , muß  $\mathcal{L}^n(D_{\varepsilon,i}^\delta \cap S_\varepsilon) = 0$  sein. Daher ist  $v \geq 1$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall auf  $D \cap D_\varepsilon^\delta$ , und somit

$$\text{cap}_p(D \cap D_\varepsilon^\delta, \Omega) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p .$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\text{cap}_p(D \cap D_\varepsilon^\delta, \Omega) \leq \text{cap}_p(D \cap D_\varepsilon, \Omega) \leq 2\varepsilon .$$

Zusammen mit (3.11.1) ergibt sich damit, daß  $\{u \geq \delta\}$  eine  $\text{cap}_p$ -Nullmenge ist. Betrachten wir nun eine abzählbare Folge  $\delta \rightarrow 0$ , so folgt, daß auch  $\{u > 0\}$  eine  $\text{cap}_p$ -Nullmenge ist, d.h.  $u_1 = u_2$   $\text{cap}_p$ -fast überall.  $\square$

Als Folgerung beweisen wir den folgenden entscheidenden

**3.12 Satz.** Für  $1 < p \leq n$  existiert eine natürliche Einbettung

$$H_{loc}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C_p(\Omega) ,$$

d.h. zu  $u \in H_{loc}^{1,p}(\Omega)$  gibt es genau ein  $\tilde{u} \in C_p(\Omega)$ , so daß  $\tilde{u} = u$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall.

*Beweis.* Wir haben zu zeigen, daß zu  $u$  ein  $\tilde{u}$  wie in der Behauptung existiert. Denn ist  $\tilde{v} \in C_p(\Omega)$  eine weitere Funktion mit  $\tilde{v} = u$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall, so ist

$\tilde{v} = \tilde{u}$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall, nach Lemma 3.11 also  $\tilde{v} = \tilde{u}$  in  $C_p(\Omega)$ . Andererseits, wenn  $v = u$  in  $H_{loc}^{1,p}(\Omega)$ , so ist auch  $\tilde{u} = v$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall. Dies bedeutet, daß mit den Äquivalenzrelationen auf  $H_{loc}^{1,p}(\Omega)$  und  $C_p(\Omega)$  die Einbettung als Abbildung definiert ist. Die Einbettung ist nicht surjektiv, da  $C_p(\Omega)$  (für  $n \geq 2$ ) z.B. Funktionen mit beliebigen Punktsingularitäten enthält (nach 3.6 haben kleine Kugeln kleine Kapazität).

Zur Konstruktion von  $\tilde{u}$  wählen wir eine Ausschöpfung von  $\Omega$  mit offenen Mengen  $D_i \subset\subset D_{i+1} \subset \Omega$  für  $i \in \mathbb{N}$  und  $\chi_i \in C_0^\infty(D_{i+1})$  mit  $\chi_i = 1$  auf  $D_i$ . Desweiteren wähle  $u_k \in C^\infty(\Omega) \cap H_{loc}^{1,p}(\Omega)$  mit

$$\|u_k - u\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq 4^{-k} .$$

Mit

$$v_{i,k} := 2^k \chi_i (u_k - u_{k+1})$$

sind dann

$$E_{i,k} := \{x \in \Omega ; |v_{i,k}(x)| > 1\} \subset\subset D_{i+1}$$

offene Mengen, und  $|v_{i,k}|$  sind zulässige Funktionen für die Definition der Kapazität von  $E_{i,k}$ . Wegen

$$\begin{aligned} \|\nabla v_{i,k}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq C(\chi_i) 2^k \|u_k - u_{k+1}\|_{H^{1,p}(D_{i+1})} \\ &\leq C(\chi_i) 2^{-k} \end{aligned}$$

ist daher

$$\text{cap}_p(E_{i,k}, \Omega) \leq C(i, p) 2^{-kp} .$$

Für die offenen Mengen

$$\tilde{E}_{i,l} := \bigcup_{k \geq l} E_{i,k} \subset D_{i+1}$$

gilt dann nach der Subadditivität (3.9.2) der Kapazität

$$\text{cap}_p(\tilde{E}_{i,l}, \Omega) \leq \sum_{k \geq l} \text{cap}_p(E_{i,k}, \Omega) \leq C(i, p) 2^{-lp} .$$

Da auf  $\Omega \setminus \tilde{E}_{i,l}$

$$|\chi_i(u_k - u_{k+1})| \leq 2^{-k} \quad \text{für } k \geq l,$$

existiert

$$\tilde{u}_{i,l} := \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_i u_k \in C^0(\Omega \setminus \tilde{E}_{i,l}) .$$

Nun ist  $\Omega \setminus \tilde{E}_{i,l}$  steigend in  $l$  und  $\tilde{u}_{i,l+1} = \tilde{u}_{i,l}$  auf  $\Omega \setminus \tilde{E}_{i,l}$ . Also können wir mit  $\tilde{E}_i := \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \tilde{E}_{i,l}$  definieren

$$\tilde{u}_i := \begin{cases} \tilde{u}_{i,l} & \text{auf } \Omega \setminus \tilde{E}_{i,l} \text{ für } l \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{in } \tilde{E}_i. \end{cases}$$

Da  $\text{cap}_p(\tilde{E}_{i,l}, \Omega) \rightarrow 0$  für  $l \rightarrow \infty$ , ist somit  $\tilde{u}_i \in C_p(\Omega)$  nach Konstruktion, und  $\tilde{E}_i$  ist eine  $\text{cap}_p$ -Nullmenge. Da nun  $u_k \rightarrow u$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $\Omega$  für eine Teilfolge  $k \rightarrow \infty$ , erhalten wir, daß  $\tilde{u}_i = \chi_i u$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $\Omega \setminus \tilde{E}_i$ . Da  $\tilde{E}_i$  eine  $\text{cap}_p$ -Nullmenge, nach 3.11 also auch eine  $\mathcal{L}^n$ -Nullmenge ist, folgt

$$\tilde{u}_i = \chi_i u \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall in } \Omega,$$

insbesondere  $\tilde{u}_i = u$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $D_i$ .

Damit ist die gewünschte Funktion  $\tilde{u}$  lokal in  $\Omega$  konstruiert und wir haben nur noch diese lokale Funktionen geeignet zusammensetzen. Dazu wähle eine Partition der Eins mit nichtnegativen Funktionen  $\eta_i \in C_0^\infty(D_i \setminus \overline{D_{i-2}})$  und definiere

$$\tilde{u} := \sum_i \eta_i \tilde{u}_i,$$

wobei lokal höchstens zwei nichttriviale Summanden auftreten. Dann ist  $\tilde{u} = u$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $\Omega$ , und es bleibt zu zeigen daß  $\tilde{u} \in C_p(\Omega)$ . Dazu wähle  $l_i$  bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  so, daß

$$\text{cap}_p(\tilde{E}_{i,l_i}, \Omega) \leq \varepsilon 2^{-i}.$$

Für die offenen Menge

$$\tilde{E} := \bigcup_i \tilde{E}_{i,l_i}$$

folgt dann nach (3.9.2), daß  $\text{cap}_p(D \cap \tilde{E}) \leq \varepsilon$  für beschränkte Mengen  $D \subset \Omega$ , und da  $\tilde{u}_i$  auf  $\Omega \setminus \tilde{E}_{i,l_i}$  stetig ist, ist  $\tilde{u}$  auf  $\Omega \setminus \tilde{E}$  stetig.  $\square$

Offensichtlich ist die Einbettung in 3.12 linear. Allgemeiner gilt sogar  $\widetilde{\psi(u)} = \psi(\tilde{u})$  für jede global Lipschitz-stetige Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , z.B. also  $\max(u, 0) = \max(\tilde{u}, 0)$ . Eine bessere Ausnutzung des Beweises von 3.12 ergibt sogar die folgende „Stetigkeitsaussage“, wobei zu bemerken ist, daß wir auf  $C_p(\Omega)$  keine Topologie definiert haben.

**3.13 Lemma.** Konvergiert  $u_k \rightarrow u$  für  $k \rightarrow \infty$  stark in  $H^{1,p}(\Omega)$ , so gilt für eine Teilfolge  $k \rightarrow \infty$

$$\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u} \quad \text{cap}_p\text{-fast gleichmäßig lokal in } \Omega,$$

d.h. zu  $D \subset\subset \Omega$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es eine offene Menge  $E \subset D$  mit  $\text{cap}_p(E, \Omega) \leq \varepsilon$ , so daß

$$\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u} \quad \text{gleichmäßig in } D \setminus E.$$

*Beweis.* Gehe zu einer Teilfolge über für die

$$\|u_k - u\|_{H^{1,p}} \leq 4^{-k}$$

und wähle  $u_{k,j} \in C^\infty(\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega)$  mit

$$\|u_{k,j} - u_k\|_{H^{1,p}} \leq 4^{-k-j} .$$

Wie im ersten Teil des Beweises von 3.12 konstruieren wir zu  $\varepsilon_k > 0$  eine offene Menge  $E_k \subset D$  mit  $\text{cap}_p(E_k, \Omega) \leq \varepsilon_k$  und

$$\tilde{u}_{k,j} \rightarrow \tilde{u}_k \quad \text{gleichmäßig in } D \setminus E_k \text{ für } j \rightarrow \infty .$$

Wähle dann  $j_k$  so daß  $w_k := u_{k,j_k}$  erfüllt

$$|\tilde{w}_k - \tilde{u}_k| \leq \frac{1}{k} \quad \text{in } \overline{D} \setminus E_k .$$

Da

$$\begin{aligned} \|w_k - u\|_{H^{1,p}} &\leq \|w_k - u_k\|_{H^{1,p}} + \|u_k - u\|_{H^{1,p}} \\ &\leq 2 \cdot 4^{-k} , \end{aligned}$$

gibt es ebenso zu  $\varepsilon > 0$  eine offene Menge  $E \subset D$  mit  $\text{cap}_p(E, \Omega) \leq \varepsilon$ , so daß

$$|\tilde{w}_k - \tilde{u}| \leq \delta_k \quad \text{auf } D \setminus E$$

mit  $\delta_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Für die offene Menge

$$\tilde{E} := E \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l$$

gilt dann in  $D \setminus \tilde{E}$

$$|\tilde{u}_k - \tilde{u}| \leq \frac{1}{k} + \delta_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

und wegen der Subadditivität (3.9.2) ist

$$\text{cap}_p(\tilde{E}, \Omega) \leq \text{cap}_p(E, \Omega) + \sum_{l \in \mathbb{N}} \text{cap}_p(E_l, \Omega) \leq 2\varepsilon ,$$

falls wir  $\varepsilon_k = 2^{-k} \cdot \varepsilon$  wählen. □

Damit sind wir nun in der Lage, eine Darstellung von  $\text{cap}_p(E, \Omega)$  als Infimum anzugeben, in der Nebenbedingungen nur auf  $E$  vorkommen. Allerdings muß man zu dieser Darstellung den Begriff der Kapazität schon kennen, sie zeigt aber, wie man die Eigenschaft „ $u \geq 1$  auf einer offenen Menge  $D \supset E$ “ konsistent abschließt.

**3.14 Satz.** Sei  $1 < p \leq n$  und  $q$  wie in 3.3, und definiere in Analogie zu 3.3

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{q,p}(S, \Omega) &:= \{u \in L^q(\mathbb{R}^n) ; \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ mit} \\ &\quad u = 0 \text{ } \mathcal{L}^n\text{-fast überall in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \\ &\quad \tilde{u} \geq 1 \text{ } \text{cap}_p(\cdot, \Omega)\text{-fast überall auf } S \} \end{aligned}$$

(wobei in der Ungleichung die zugehörige Funktion  $\tilde{u} \in C_p(\Omega)$  gemeint ist). Dann gilt für jede beschränkte Menge  $E \subset \Omega$

$$\text{cap}_p(E, \Omega) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p ; u \in \tilde{M}_{q,p}(E, \Omega) \right\} .$$

*Beweis.* Man sieht sofort ein, daß das Infimum gegenüber der Darstellung in 3.3 höchstens kleiner geworden ist. Denn ist  $u \in M_{q,p}(D, \Omega)$  für eine offene Menge  $D \supset E$ , so ist  $\min(u - 1, 0) = 0$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall auf  $D$ , also nach 3.11 auch  $\min(\tilde{u} - 1, 0) = 0$   $\text{cap}_p(\cdot, D)$ -fast überall, somit  $D \cap \{\tilde{u} < 1\}$  eine  $\text{cap}_p(\cdot, \Omega)$ -Nullmenge (nach erster Ungleichung in (3.7.1)). Dies heißt, daß  $\tilde{u} \geq 1$   $\text{cap}_p(\cdot, \Omega)$ -fast überall auf  $D$ , daher  $u \in \tilde{M}_{q,p}(E, \Omega)$ .

Nun sei umgekehrt  $u \in \tilde{M}_{q,p}(E, \Omega)$ . Wähle eine Kugel mit  $\bar{E} \subset B_R(0)$ . Da  $\tilde{u} \in C_p(\Omega)$  gibt es zu  $\varepsilon > 0$  eine offene Menge  $E_1 \subset \Omega$ , so daß  $\tilde{u}$  auf  $\Omega \setminus E_1$  stetig ist und  $\text{cap}_p(D \cap E_1, \Omega) \leq \varepsilon$  für beschränkte offene Mengen  $D \subset \Omega$ . Mit  $D_1 := B_R(0) \cap E_1$  ist dann

$$\text{cap}_p(D_1, \Omega) \leq \varepsilon .$$

Desweiteren ist  $\tilde{u} \geq 1$   $\text{cap}_p$ -fast überall auf  $E$ , d.h.  $E \cap \{\tilde{u} < 1\}$  ist  $\text{cap}_p$ -Nullmenge. Nach Definition einer Nullmenge gibt es daher  $E_{2i} \subset B_R(0) \cap \Omega$  mit

$$E \cap \{\tilde{u} < 1\} \subset E_2 := \bigcup_i E_{2i} \quad \text{und} \quad \sum_i \text{cap}_p(E_{2i}, \Omega) \leq \varepsilon .$$

Nach (3.9.2) gilt dann auch  $\text{cap}_p(E_2, \Omega) \leq \varepsilon$ , also

$$\text{cap}_p(D_1 \cup E_2, \Omega) \leq 2\varepsilon .$$

Es gibt dann eine Funktion  $v \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger, die außerhalb  $\Omega$  verschwindet, die  $v \geq 1$  auf einer offenen Menge  $D_2 \supset D_1 \cup E_2$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p \leq 3\varepsilon$$

erfüllt. Dann ist  $\tilde{u}$  stetig auf der in  $\Omega \cap B_R(0)$  abgeschlossenen Menge  $\Omega \cap B_R(0) \setminus D_2$  und  $\tilde{u} \geq 1$  auf der Teilmenge  $E \setminus D_2$ . Also gibt es eine offene Umgebung  $E_3 \supset E \setminus D_2$ , so daß  $\tilde{u} \geq 1 - \varepsilon$  auf  $E_3 \setminus D_2$ . Die Funktion

$$w := \max(v, 0) + \frac{1}{1 - \varepsilon} \max(u, 0)$$

erfüllt daher die Ungleichung  $\tilde{w} \geq 1$  auf  $D_3 := D_2 \cup E_3$ , und da  $D_3$  offen ist,  $w \geq 1$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall auf  $D_3$ . Wegen  $E \subset D_3$  ist  $w$  somit zulässig für die Kapazität von  $E$ , d.h.

$$\text{cap}_p(E, \Omega) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} |\nabla u| + |\nabla v| \right)^p .$$

Wegen der elementaren Ungleichung (3.4.2) ist dies

$$\begin{aligned} &\leq (1 + \delta) \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|\nabla u|}{1 - \varepsilon} \right)^p + C_\delta \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p \\ &\leq \frac{1 + \delta}{(1 - \varepsilon)^p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + 3C_\delta \cdot \varepsilon . \end{aligned}$$

Lassen wir erst  $\varepsilon \rightarrow 0$  und dann  $\delta \rightarrow 0$  konvergieren, so folgt

$$\text{cap}_p(E, \Omega) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p ,$$

was zu zeigen war. □

Wir können nun den zentralen Satz in diesem Kapitel beweisen.

**3.15 Satz.** Sei  $1 < p \leq n$  und  $\Omega$  beschränkt, falls  $p = n$ . Dann gibt es zu jeder beschränkten Menge  $E \subset \Omega$  mit  $\text{cap}_p(E, \Omega) < \infty$  genau ein Kapazitätspotential  $\varphi_E \in L^q(\mathbb{R}^n)$  mit  $\nabla \varphi_E \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , wobei  $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$ , so daß

- (3.15.1)  $0 \leq \varphi_E \leq 1$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $\mathbb{R}^n$ ,
- (3.15.2)  $\varphi_E = 0$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ,
- (3.15.3)  $\varphi_E = 1$   $\text{cap}_p(\cdot, \Omega)$ -fast überall auf  $E$

und

$$\text{cap}_p(E, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla \varphi_E|^p .$$

Es ist  $\varphi_E = 0$  genau dann, wenn  $\text{cap}_p(E, \Omega) = 0$ . Das Potential  $\varphi_E$  ist die eindeutig bestimmte Lösung der Variationsungleichung

$$\int \nabla(\varphi_E - v) \cdot \nabla_p \varphi_E \leq 0$$

für alle  $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$  mit  $\nabla v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , für die

- $v = 0$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ,
- $\tilde{v} \geq 1$   $\text{cap}_p(\cdot, \Omega)$ -fast überall auf  $E$ .

*Beweis.* Es sei  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Minimalfolge aus der Darstellung der Kapazität in 3.14, d.h.  $u_i \in M_{q,p}(E, \Omega)$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \rightarrow \text{cap}_p(E, \Omega) .$$

Wir können annehmen, daß  $0 \leq u_i \leq 1$ , da der Übergang zu  $\max(0, \min(1, u_i))$  das  $L^p$ -Integral von  $\nabla u_i$  verringert. Also sind  $u_i$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  beschränkt. Im Falle  $p < n$  sind  $u_i$  nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz in  $L^q(\mathbb{R}^n)$

beschränkt. Daher gibt es (für  $p \leq n$ ) ein  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$  mit  $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , so daß für eine Teilfolge  $i \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \nabla u_i &\rightarrow \nabla u && \text{schwach in } L^p(\mathbb{R}^n), \\ u_i &\rightarrow u && \text{schwach* in } L^q(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm liefert

$$(3.15.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p = \text{cap}_p(E, \Omega).$$

Nun gilt für eine weitere Teilfolge

$$u_i \rightarrow u \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall in } \mathbb{R}^n,$$

so daß also auch  $u = 0$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ . Können wir nun zeigen, daß

$$(3.15.5) \quad \tilde{u} \geq 1 \quad \text{cap}_p\text{-fast überall in } E,$$

so ist  $u \in \tilde{M}_{q,p}(E, \Omega)$ , also zulässig für das Variationsproblem aus 3.14, d.h.

$$\text{cap}_p(E, \Omega) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p.$$

Zusammen mit (3.15.4) folgt also, daß  $u$  ein absolutes Minimum ist. Da wegen der punktweisen Konvergenz auch  $0 \leq u \leq 1$ , ist wegen (3.15.5) also  $\tilde{u} = 1$   $\text{cap}_p$ -fast überall auf  $E$ , d.h. die Eigenschaften (3.15.1) - (3.15.3) sind gezeigt. Es gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p$$

für alle  $v$  wie in der Behauptung. Die erste Variation ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(u - v) \cdot \nabla_p u \leq 0 \quad \text{für alle derartigen } v.$$

Daraus folgt die Eindeutigkeit (siehe Beweis von 3.5).

Zum Beweis von (3.15.5) wähle  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\eta = 1$  in einer Umgebung von  $\bar{E}$ . Dann konvergiert  $\eta u_i \rightarrow \eta u$  schwach in  $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Nach einem Lemma von Mazur ist

$$\eta u \in \overline{\text{conv}\{\eta u_i; i \in \mathbb{N}\}} \quad \text{in } H^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

d.h. es gibt konvexe Kombinationen  $w_j$  der  $\eta u_i$ , so daß  $w_j \rightarrow w := \eta u$  stark in  $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  für  $j \rightarrow \infty$ . Nach 3.13 folgt daraus, daß  $\tilde{w}_j \rightarrow \tilde{w}$   $\text{cap}_p$ -fast gleichmäßig lokal in  $\Omega$ , d.h. zu einer Überdeckung von  $\Omega$  mit offenen Mengen

$D_k \subset\subset \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und zu  $\varepsilon > 0$  gibt es offene Mengen  $E_k$  mit  $\text{cap}_p(E_k, \Omega) \leq \varepsilon 2^{-k}$ , so daß

$$(3.15.6) \quad \tilde{w}_j \rightarrow \tilde{w} \quad \text{gleichmäßig auf } D_k \setminus E_k \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

Nun sind nach Konstruktion  $\tilde{w}_j \geq 1$   $\text{cap}_p$ -fast überall auf  $E$ , d.h.  $N_j := E \cap \{\tilde{w}_j < 1\}$  sind  $\text{cap}_p$ -Nullmengen. Mit (3.15.6) folgt daher

$$E \cap \{\tilde{w} < 1\} \subset \bigcup_j N_j \cup \bigcup_k E_k.$$

Nach Wahl der  $E_k$  und da  $\bigcup_j N_j$  auch eine  $\text{cap}_p$ -Nullmenge ist, ist daher  $E \cap \{\tilde{w} < 1\} = E \cap \{\tilde{w} < 1\}$  eine  $\text{cap}_p$ -Nullmenge, was zu zeigen war.  $\square$

Als Konsequenz stellen wir den Zusammenhang zur potentialtheoretischen Definition der Kapazität her.

**3.16 Lemma.** Sei  $\varphi_E$  das Kapazitätspotential aus 3.15 zu einer beschränkten Menge  $E \subset \Omega$ . Dann gilt:

(3.16.1)  $\mu_E := -\Delta_p \varphi_E$  ist positives Radon-Maß in  $\Omega$  (wobei  $\Delta_p := \nabla \cdot \nabla_p$  mit  $\nabla_p$  wie in (2.6.4)).

(3.16.2)  $\text{supp } \mu_E \subset \overline{E}$ .

(3.16.3) Ist  $E$  kompakt und hat  $\Omega$  Lipschitz-Rand, so ist

$$\mu_E(\Omega) = \text{cap}_p(E, \Omega).$$

*Beweis.* Mit  $u := \varphi_E$  setze in der Variationsungleichung in 3.15 als Vergleichsfunktion  $v = u + \varepsilon \zeta$  ein, wobei  $\varepsilon > 0$  und  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$  nichtnegativ ist. Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \zeta \cdot \nabla_p u \geq 0.$$

Daraus folgt, daß die Distribution  $-\Delta_p u$  ein positives Funktional auf  $C_0^\infty(\Omega)$  ist, und somit ein in  $\Omega$  lokal beschränktes nichtnegatives Radon-Maß. Falls  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{E})$ , so können wir  $\zeta$  auch durch  $-\zeta$  ersetzen und erhalten, daß  $-\Delta_p u = 0$  in  $\Omega \setminus \overline{E}$ , was (3.16.2) beweist.

Nun sei  $E \subset \Omega$  kompakt. Wir zeigen zunächst, daß

$$(3.16.4) \quad -\Delta_p u \leq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus E.$$

Dazu setze  $v = \max(u - \varepsilon \zeta, 0)$ , wobei  $\varepsilon > 0$  und  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus E)$  nichtnegativ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(u - v) \cdot \nabla_p u = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \min(\varepsilon \zeta, u) \cdot \nabla_p u \\ &= \varepsilon \int_{\{\varepsilon \zeta < u\}} \nabla \zeta \cdot \nabla_p u + \int_{\{\varepsilon \zeta \geq u\}} |\nabla u|^p, \end{aligned}$$

also für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$0 \geq \int_{\{\varepsilon\zeta < u\}} \nabla\zeta \cdot \nabla_p u \rightarrow \int_{\{0 < u\}} \nabla\zeta \cdot \nabla_p u = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\zeta \cdot \nabla_p u,$$

da  $\nabla_p u = 0$  fast überall in  $\{u = 0\}$  und da  $u \geq 0$ . Dies beweist (3.16.4).

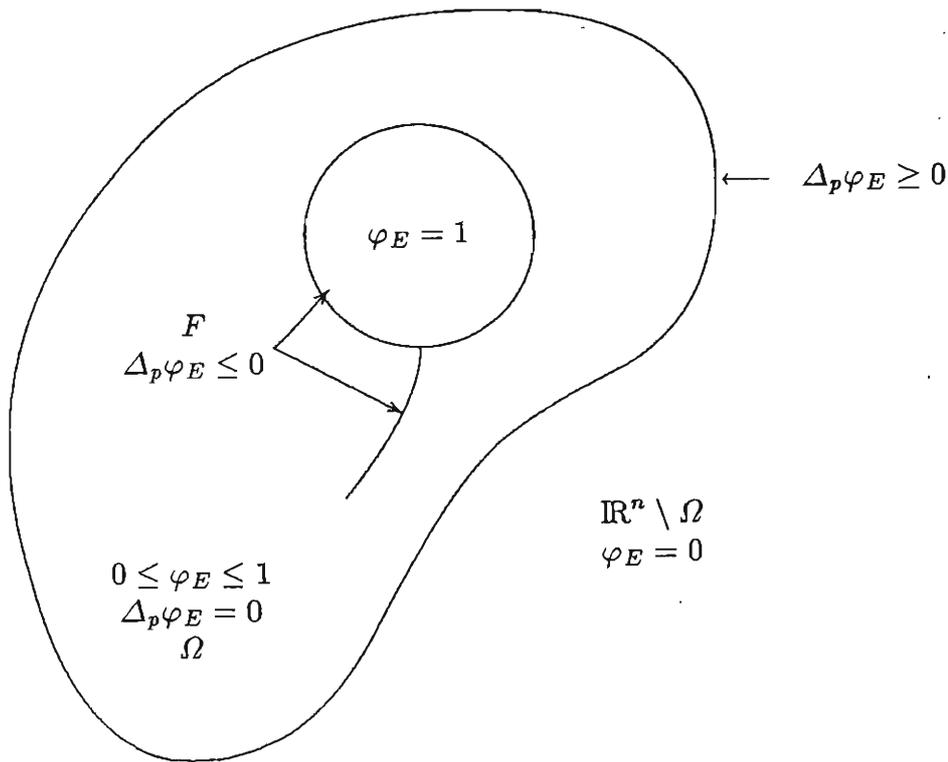


Bild 3.6: Vorzeichen von  $\Delta_p \varphi_E$ .

Zum Beweis von (3.16.3) bemerken wir zunächst, daß  $\tilde{u} = 1$   $\text{cap}_p$ -fast überall auf  $E$  und  $u = 0$   $\mathcal{H}^{n-1}$ -fast überall auf  $\partial\Omega$  ist. Daraus erhalten wir wegen (3.16.2) formal durch partielle Integration

$$\mu_E(\Omega) = \int_{\Omega} u \, d\mu_E = - \int_{\Omega} u \Delta_p u = \int_{\Omega} |\nabla u|^p = \text{cap}_p(E, \Omega).$$

Die Schwierigkeit im Beweis dieser Identität besteht darin, daß wir das erste Integral nicht hinschreiben können, da wir keine Stetigkeitsaussagen über  $u$  haben.

Wir zeigen zunächst daß  $\mu_E(\Omega) \geq \text{cap}_p(E, \Omega)$ . Dazu approximiere  $u$  durch Funktionen  $u_\rho \in C_0^\infty(\Omega)$  (schneide für  $p < n$  zunächst gemäß 3.4 ab) mit  $0 \leq u_\rho \leq 1$  und  $\nabla u_\rho \rightarrow \nabla u$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned}\mu_E(\Omega) &\geq \int_{\Omega} u_{\rho} d\mu_E = \langle u_{\rho}, -\Delta_p u \rangle \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_{\rho} \cdot \nabla_p u \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^p = \text{cap}_p(E, \Omega)\end{aligned}$$

für  $\rho \rightarrow 0$ , wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Distributionsprodukt bezeichnet.

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung müssen wir ausnutzen, daß  $\tilde{u} \geq 1$   $\text{cap}_p$ -fast überall auf  $E$ . Wähle wie im Beweis von 3.14 Funktionen  $v_{\varepsilon} \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_{\varepsilon}|^p \leq \varepsilon,$$

und so daß

$$w := \frac{u}{1-\varepsilon} + v_{\varepsilon} \geq 1 \quad \text{in einer Umgebung von } E$$

und  $w = 0$  außerhalb  $\Omega$ . Wie vorher  $u$  approximiere nun  $w$  durch Funktionen  $w_{\rho} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , so daß nach wie vor  $w_{\rho} \geq 1$  auf  $E$  (definiere  $w_{\rho}$  in einer Umgebung von  $E$  durch Faltung). Dann ist

$$\begin{aligned}\mu_E(E) &\leq \int_{\Omega} w_{\rho} d\mu_E = \langle w_{\rho}, -\Delta_p u \rangle \\ &= \int_{\Omega} \nabla w_{\rho} \cdot \nabla_p u \rightarrow \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla_p u \quad \text{für } \rho \rightarrow 0 \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \int_{\Omega} \nabla v_{\varepsilon} \cdot \nabla_p u \\ &\rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^p = \text{cap}_p(E, \Omega) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Nach (3.16.2) ist außerdem  $\mu_E(\Omega) = \mu_E(E)$ . □

Wir interessieren uns nun dafür, wie das Kapazitätspotential  $\varphi_E$  die  $\text{cap}_p$ -Werte 1 auf  $E$  annimmt. Zunächst zeigen wir, daß  $\varphi_E$  in einer Umgebung von  $\overline{E}$  positiv bleibt, wobei wir uns hier auf den Fall  $p = 2$  beschränken.

**3.17 Lemma.** Sei  $p = 2$ ,  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  sei zusammenhängend und habe Lipschitz-Rand, und es sei  $D \subset\subset \Omega$ . Dann gilt für kompakte Mengen  $E \subset D$  für das Kapazitätspotential  $\varphi_E$  aus 3.15

$$\varphi_E \geq c(n, \Omega, D) \cdot \text{cap}_2(E, \Omega) \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall auf } \overline{D}$$

mit einer positiven Zahl  $c(n, \Omega, D)$ .

*Beweis.* Es sei  $G_x(\cdot)$  die Green-Funktion von  $-\Delta$  auf  $\Omega$  mit Randwerten 0 und Pol in  $x \in \Omega$ , d.h.

$$G_x(y) := F(y-x) - H_x(y) ,$$

wobei

$$F(y) := \begin{cases} \frac{n-2}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1)} |y|^{2-n} & \text{für } n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|y|} & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

die Fundamentallösung von  $-\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist und  $H_x \in \dot{H}^{1,2}(\Omega)$  die schwache Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta H_x &= 0 && \text{in } \Omega, \\ H_x &= F(\cdot - x) && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir benutzen nun, daß

$$(3.17.1) \quad H_x \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{mit } \alpha > 0 \text{ gleichmäßig für } x \in \overline{D},$$

was aus der Regularitätstheorie linearer elliptischer Operatoren folgt, und daß

$$(3.17.2) \quad G_x \geq c(n, \Omega, D) > 0 \quad \text{in } \overline{D} \text{ gleichmäßig für } x \in \overline{D},$$

was aus dem starken Maximumprinzip für den Laplace-Operator folgt. Wegen (3.17.1) und wegen  $\text{supp } \mu_E \subset E$  nach (3.16.2) können wir definieren

$$u(x) := \int_{\Omega} G_x d\mu_E \quad \text{für } x \in \Omega \setminus E.$$

Nach (3.17.2) folgt dann für  $x \in \overline{D} \setminus E$

$$(3.17.3) \quad u(x) \geq \inf_{\overline{D}} G_x \cdot \mu_E(\Omega) \geq c(n, \Omega, D) \text{cap}_p(E, \Omega)$$

wegen (3.16.3). Wir wollen zeigen, daß  $u = \varphi_E$  auf  $\Omega \setminus E$ . Dazu multipliziere  $u$  mit einer Testfunktion  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega \setminus E)$ . Da durch

$$v(y) := \int_{\Omega} \zeta(x) G_x(y) dx$$

wegen (3.17.1) und der Definition von  $G_x$  eine Funktion in  $\dot{H}^{1,2}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  definiert ist, gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta u &= \int_{\Omega} v d\mu_E = \langle v, -\Delta \varphi_E \rangle \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi_E = \int_{\Omega} \zeta \varphi_E , \end{aligned}$$

denn  $v$  ist schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \zeta && \text{in } \Omega, \\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß  $u = \varphi_E$   $\mathcal{L}^n$ -fast überall in  $\Omega \setminus E$ . Also gilt (3.17.3) für  $\varphi_E$  auf  $\overline{D} \setminus E$ . Da  $\tilde{\varphi}_E = 1$   $\text{cap}_2$ -fast überall auf  $E$  folgt die Behauptung unter Benutzung von 3.11.  $\square$

Wir geben nun eine hinreichende Bedingung an die Menge  $E$  an, die die Stetigkeit des Kapazitätspotentials impliziert:

**3.18 Satz.** Es mögen die Voraussetzungen in 3.17 erfüllt sein. Wir sagen,  $E$  erfüllt die Wiener-Bedingung im Punkte  $x_0 \in E$ , falls es eine Kugel  $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$  und ein  $\delta < 1$  gibt, so daß mit  $r_i := \delta^i r_0$  gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i^{2-n} \text{cap}_2(E \cap B_{r_{i+1}}(x_0), B_{r_i}(x_0)) = \infty .$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist das Kapazitätspotential  $\varphi_E$  aus 3.15 in  $x_0$  stetig, d.h. es gilt

$$\text{ess lim}_{x \rightarrow x_0} \varphi_E(x) = 1 .$$

*Beweis.* Wir definieren Zahlen  $0 < \varepsilon_i \leq 1$  durch die Eigenschaft

$$(3.18.1) \quad \varphi_E \geq 1 - \varepsilon_i \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall auf } B_{r_i}(x_0),$$

was für  $i = 0$  mit  $\varepsilon_0 = 1$  erfüllt ist. Wir haben zu zeigen, daß  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ . Dazu betrachte die Funktion

$$w := 1 - \frac{1 - \varphi_E}{\varepsilon_i} ,$$

die erfüllt

$$\begin{aligned} w &\geq 0 && \mathcal{L}^n\text{-fast überall in } B_{r_i}(x_0), \\ \tilde{w} &= 1 && \text{cap}_2\text{-fast überall auf } E_i := E \cap B_{r_{i+1}}(x_0). \end{aligned}$$

Nun sei  $\varphi_i$  das Kapazitätsfunktional von  $E_i$  bezüglich des Gebietes  $\Omega_i := B_{r_i}(x_0)$ . Falls wir nun zeigen können, daß

$$(3.18.2) \quad \varphi_i \leq w \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall auf } B_{r_i}(x_0),$$

so gilt in dieser Kugel

$$(3.18.3) \quad \varphi_E \geq 1 - \varepsilon_i + \varepsilon_i \varphi_i .$$

Zur Abschätzung von  $\varphi_i$  nach unten betrachten wir die skalierten Potentiale

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_i(y) &:= \varphi_i(x_0 + r_i y) , \\ \hat{E}_i &:= \{y \in \mathbb{R}^n ; x_0 + r_i y \in E_i\} . \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}_2(\hat{E}_i, B_1(0)) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \hat{\varphi}_i|^2 = r_i^{2-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_i|^2 \\ &= r_i^{2-n} \operatorname{cap}_2(E_i, B_{r_i}(x_0)) =: \kappa_i, \end{aligned}$$

wobei nach Voraussetzung

$$\sum_i \kappa_i = \infty,$$

d.h. die Voraussetzung ist eine Bedingung an die skalierten Kapazitäten. Nach 3.17 gilt

$$\hat{\varphi}_i \geq c(n) \operatorname{cap}_2(\hat{E}_i, B_1(0)) \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall auf } \overline{B_\delta(0)}.$$

Damit wird (3.18.3) zu

$$\varphi_E \geq 1 - \varepsilon_i(1 - c(n)\kappa_i) \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall auf } B_{r_{i+1}}(x_0).$$

Dies bedeutet, daß wir in (3.18.1) setzen können

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i(1 - c(n)\kappa_i) > 0$$

(wobei ohne Einschränkung  $c(n) \leq \frac{1}{2}$  und  $\kappa_i \leq 1$ ). Dies ergibt

$$\log \varepsilon_j = \sum_{0 \leq i < j} \log(1 - c(n)\kappa_i) \leq -c(n) \sum_{0 \leq i < j} \kappa_i \rightarrow -\infty \quad \text{für } j \rightarrow \infty,$$

also die Behauptung.

Es bleibt (3.18.2) zu zeigen. Dazu sei zuerst

$$v := \min(\varphi_i, w).$$

Da  $\tilde{w} = 1 \operatorname{cap}_2(\cdot, \Omega)$ -fast überall auf  $E$ , also auch auf  $E_i$ , und somit nach (3.7.1) auch  $\operatorname{cap}_2(\cdot, B_{r_i}(x_0))$ -fast überall auf  $E_i$ , folgt dies auch für  $\tilde{v}$ . Damit ist  $v$  zulässige Vergleichsfunktion für  $\varphi_i$  in 3.15, d.h.

$$(3.18.4) \quad 0 \geq \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\varphi_i - v) \cdot \nabla \varphi_i = \int_{B_{r_i}(x_0)} \nabla \max(\varphi_i - w, 0) \cdot \nabla \varphi_i.$$

Dann betrachte

$$v := \begin{cases} \max(\varphi_E, 1 - \varepsilon_i(1 - \varphi_i)) & \text{in } B_{r_i}(x_0), \\ \varphi_E & \text{in } \Omega \setminus B_{r_i}(x_0), \end{cases}$$

was eine zulässige Vergleichsfunktion für  $\varphi_E$  in 3.15 definiert, d.h.

$$(3.18.5) \quad \begin{aligned} 0 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\varphi_E - v) \cdot \nabla \varphi_E \\ &= -\varepsilon_i \int_{B_{r_i}(x_0)} \nabla \max(\varphi_i - w, 0) \cdot \nabla \varphi_E. \end{aligned}$$

Division von (3.18.5) durch  $\varepsilon_i^2$  und Addition zu (3.18.4) ergibt

$$0 \geq \int_{B_{r_i}(x_0)} |\nabla \max(\varphi_i - w, 0)|^2 .$$

Da  $\max(\varphi_i - w, 0) = 0$  auf  $\partial B_{r_i}(x_0)$ , folgt daraus die Behauptung.  $\square$

**3.19 Bemerkung.** Ist  $K \subset E$  eine kompakte Menge, so daß für  $x_0 \in K$  die Wiener-Bedingung in 3.18 gleichmäßig erfüllt ist (d.h.  $r_0$  und  $\delta$  sind unabhängig von  $x_0$  und die Summe divergiert gleichmäßig), so gilt auch die Konklusion in 3.18 gleichmäßig in  $x_0$ . Gibt es in der Wiener-Bedingung ein  $\kappa > 0$  mit

$$(3.19.1) \quad r_i^{2-n} \operatorname{cap}_2(E \cap B_{r_{i+1}}(x_0), B_{r_i}(x_0)) \geq \kappa \quad \text{für alle } i,$$

so folgt im Beweis von 3.18

$$\varepsilon_i \leq \theta^i \quad \text{mit } \theta := 1 - c(n)\kappa < 1,$$

d.h.

$$1 \geq \operatorname{ess\,inf}_{B_r(x_0)} \varphi_E \geq 1 - C \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha \quad \text{mit } \alpha = \frac{\log \frac{1}{\theta}}{\log \frac{1}{\delta}} > 0 .$$

Gilt dann (3.19.1) sogar gleichmäßig für  $x_0 \in E$ , so folgt die Hölder-Stetigkeit von  $\varphi_E$  mit Exponent  $\alpha$  in einer Umgebung von  $E$ .

Wir schließen den Abschnitt mit Abschätzungen vom Poincaré-Typ, die Konsequenz der Darstellung der Kapazität in 3.14 sind.

**3.20 Poincaré-Ungleichungen.** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, sowie  $1 < p \leq n$  und  $1 < q < \infty$  mit

$$1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q} .$$

Dann gilt:

(3.20.1) Für  $u \in \dot{H}^{1,p}(\Omega)$  und  $r > 0$  ist

$$r^p \operatorname{cap}_p(\{|\tilde{u}| \geq r\}, \Omega) \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p .$$

(3.20.2) Für  $u \in H^{1,p}(\Omega)$  ist

$$\left| \int_{\Omega} u \right|^p \leq \frac{C(\Omega, p)}{\operatorname{cap}_p(\{\tilde{u} = 0\}, B_1(\Omega))} \int_{\Omega} |\nabla u|^p .$$

(3.20.3) Für  $u \in H^{1,p}(\Omega)$  ist

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^p \leq C(\Omega, p, q) \left( 1 + \frac{1}{\text{cap}_p(\{\tilde{u} = 0\}, B_1(\Omega))} \right) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p .$$

*Beweis.* Die Aussage (3.20.1) ist unmittelbare Konsequenz von 3.14 angewandt auf die Funktion  $\frac{|u|}{r}$ . Für (3.20.2) sei  $\bar{u}$  der Mittelwert

$$\bar{u} := \int_{\Omega} u$$

von  $u$ . Betrachte einen linearen stetigen Fortsetzungsoperator

$$F : H^{1,p}(\Omega) \rightarrow \dot{H}^{1,p}(\Omega') \quad \text{mit } \Omega' := B_1(\Omega),$$

also  $F(v) = v$  auf  $\Omega$  für  $v \in H^{1,p}(\Omega)$ , und definiere

$$v := F(\bar{u} - u) .$$

Da

$$\tilde{v} = \bar{u} \quad \text{cap}_2(\cdot, \Omega')\text{-fast überall auf } \Omega \cap \{\tilde{u} = 0\},$$

folgt wieder aus 3.14

$$|\bar{u}|^p \leq \frac{1}{\text{cap}_p(\Omega \cap \{\tilde{u} = 0\}, \Omega')} \int_{\Omega'} |\nabla v|^p .$$

Wegen der Stetigkeit von  $F$  und der bekannten Poincaré-Ungleichung ist

$$\|\nabla v\|_{L^p(\Omega')} \leq C \|\bar{u} - u\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} ,$$

woraus (3.20.2) folgt. Außerdem ist nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz und der bekannten Poincaré-Ungleichung

$$\|u - \bar{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u - \bar{u}\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} ,$$

also

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^p \leq C \cdot (|\bar{u}|^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p) ,$$

so daß (3.20.2) die Abschätzung (3.20.3) impliziert.  $\square$

## 4 Regularität für das Hindernisproblem

Dieser Abschnitt enthält lokale Analysis zur Regularität der Lösung und des freien Randes für das Hindernisproblem (siehe 1.5 und 2.12). Wir gehen aus von einer lokalen Lösung  $u \in H_{loc}^{1,2}(\Omega)$  des Hindernisproblems auf einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , gegeben durch die Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} \left( \nabla(u-v) \cdot (a \nabla u + e(\cdot, u)) + (u-v)f(\cdot, u) \right) \leq 0 \quad \text{für } v \in M_{loc}(u)$$

wobei

$$M_{loc}(u) := \left\{ v = u + \zeta ; \zeta \in H^{1,2}(\Omega) \text{ mit kompaktem Träger,} \right. \\ \left. \underline{u} \leq v \leq \bar{u} \text{ fast überall in } \Omega \right\},$$

wobei wir  $u \in M_{loc}(u)$  und

$$(4.0.1) \quad \underline{u}, \bar{u} \in H_{loc}^{1,2}(\Omega) \quad \text{bzw.} \quad \underline{u} = -\infty \quad \text{oder} \quad \bar{u} = +\infty$$

voraussetzen. Obige Variationsungleichung bedeutet, daß wir uns gegenüber 2.12 auf den Fall eines linearen Hauptteils beschränken, für dessen Koeffizientenmatrix  $a$  gilt

$$\begin{aligned} |a(x)| &\leq C && \text{für } x \in \Omega \\ \xi \cdot a(x)\xi &\geq c|\xi|^2 && \text{für } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $e, f$  mögen die Wachstumsbedingung in (2.10.2) erfüllen.

Wir werden uns auf den folgenden Spezialfall beschränken:

**4.1 Situation.** Es reicht den Fall einer Lösung  $u \in H_{loc}^{1,2}(\Omega)$  von

$$(4.1.1) \quad \int_{\Omega} \left( \nabla(u-v) \cdot a \nabla u + (u-v)f \right) \leq 0 \quad \text{für } v \in M_{loc}(u)$$

zu betrachten, wobei  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ .

*Beweis.* Für Lösungen  $\tilde{u}$  von (4.1.1) zu  $\tilde{f} \in L_{loc}^1(\Omega)$  werden wir als ersten Regularitätsschritt beweisen, daß unter geeigneten Voraussetzungen an die Hindernisse, und falls  $a \in C_{loc}^{0,1}(\Omega)$  ist, gilt:

$$(4.1.2) \quad \tilde{f} \in L_{loc}^p(\Omega) \Rightarrow \tilde{u} \in H_{loc}^{2,p}(\Omega).$$

In der allgemeinen Situation setzen wir dazu voraus, daß

$$\begin{aligned} |f(x, z)| &\leq C|z|^{q-1} + \varphi, \\ |e_{i, x_i}(x, z)| &\leq C|z| + \varphi, \\ |e_{, z}(x, z)| &\leq C \end{aligned}$$

mit einer Funktion  $\varphi \in L^p_{loc}(\Omega)$  und  $2 < q < \infty$  mit der echten (!) Ungleichung

$$(4.1.3) \quad 1 - \frac{n}{2} > -\frac{n}{q} .$$

Die Lösung  $u$  der allgemeinen Situation ist dann Lösung von (4.1.1) mit

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} \tilde{f} &:= -\nabla \cdot e(\cdot, u) + f(\cdot, u) \\ &= -\sum_{i=1}^n (e_{i,x_i}(\cdot, u) + e_{i,z}(\cdot, u)\partial_i u) + f(\cdot, u) . \end{aligned}$$

Ist dann  $u \in H^{1,r}_{loc}(\Omega)$  mit  $r \geq 2$  (anfänglich für  $r = 2$  erfüllt), so ist  $u \in L^{\tilde{q}}_{loc}(\Omega)$  mit  $1 - \frac{n}{r} = -\frac{n}{\tilde{q}}$  für  $r < n$  und  $r \leq \tilde{q} < \infty$  beliebig für  $r \geq n$ . Es folgt

$$\tilde{f} \in L^{\tilde{p}}_{loc}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \tilde{p} = \min\left(p, r, \frac{\tilde{q}}{q-1}\right) ,$$

also  $u \in H^{2,\tilde{p}}_{loc}(\Omega)$  nach (4.1.2). Ist  $\tilde{p} = p$ , so haben wir das Analogon von (4.1.2) für die allgemeine Situation bewiesen. Ist  $\tilde{p} = r$ , so folgt nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz sofort  $u \in H^{1,\tilde{r}}_{loc}(\Omega)$  für ein  $\tilde{r} > r$  und eine Iteration dieser Argumentation führt uns zum Ziel. Ist  $\tilde{p} = \frac{\tilde{q}}{q-1} < \min(p, r)$  (nur im Falle  $r < n$  relevant), so ist  $u \in H^{1,\tilde{r}}_{loc}(\Omega)$  mit  $1 - \frac{n}{\tilde{r}} = -\frac{n}{\tilde{p}}$ . Eine Bruchrechnung zeigt dann, daß wegen (4.1.3) wieder  $\tilde{r} > r$ , d.h. wir können uns wieder zur Behauptung hochhangeln.

Im einem zweiten Regularitätsschritt werden wir beweisen, daß unter geeigneten Voraussetzungen an die Hindernisse und  $a$  gilt:

$$(4.1.5) \quad \tilde{f} \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 \quad \implies \quad \tilde{u} \in H^{2,\infty}_{loc}(\Omega) .$$

In der allgemeinen Situation setzen wir dazu obige Abschätzungen für  $f, e$  für ein großes  $p$  voraus, so daß aus  $u \in H^{2,p}_{loc}(\Omega)$  folgt  $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ , d.h.  $1 - \frac{n}{p} \geq \alpha$ , wobei  $\alpha > 0$ . Setzen wir weiter voraus, daß

$$|f(x_1, z_1) - f(x_2, z_2)| \leq C(|x_1 - x_2|^\alpha + |z_1 - z_2|^\beta) \quad \text{mit} \quad 0 < \beta \leq 1$$

und entsprechendes für  $e_{i,x_i}$  und  $e_{i,z}$ , so gehört die Funktion  $\tilde{f}$  in (4.1.4) zur Klasse  $C^{0,\alpha\beta}_{loc}(\Omega)$  und wir können (4.1.5) anwenden.  $\square$

Wir beginnen mit der folgenden Aussage

## 4.2 Anfangsregularität. Definiere den Differentialoperator

$$(4.2.1) \quad Lv := -\nabla \cdot (a\nabla v) .$$

Es gebe Funktionen  $\underline{\varphi}, \overline{\varphi} \in L^1_{loc}(\Omega)$  mit

$$(4.2.2) \quad L\underline{u} + f \leq \underline{\varphi} \quad ; \quad L\overline{u} + f \geq \overline{\varphi} \quad \text{im Distributionssinn,}$$

wobei wir formal  $L\underline{u} = 0$  bzw.  $L\overline{u} = 0$  setzen, falls  $\underline{u} = -\infty$  bzw.  $\overline{u} = +\infty$ . Dann ist  $\varphi := L\underline{u} + f \in L^1_{loc}(\Omega)$  und

$$(4.2.3) \quad \overline{\varphi}\chi_{\{u=\overline{u}\}} \leq \varphi \leq \underline{\varphi}\chi_{\{u=\underline{u}\}} \quad \text{fast überall.}$$

*Beweis.* Wir werden zeigen, daß für  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\zeta \geq 0$  im Distributionssinn gilt

$$(4.2.4) \quad \langle \zeta, Lu + f \rangle \leq \langle \zeta, \underline{\varphi} \chi_{\{u=\underline{u}\}} \rangle .$$

Spiegelt man das Problem, so ist  $-\bar{u}$  das untere Hindernis, und damit erhält man für die gespiegelte Funktion

$$\langle \zeta, L(-u) + (-f) \rangle \leq \langle \zeta, (-\bar{\varphi}) \chi_{\{-u=-\bar{u}\}} \rangle ,$$

d.h.

$$\langle \zeta, Lu + f \rangle \geq \langle \zeta, \bar{\varphi} \chi_{\{u=\bar{u}\}} \rangle .$$

Damit ist gezeigt, daß  $Lu + f$  ein Maß ist, das durch zwei  $L_{loc}^1$ -Funktionen eingeschachtelt ist. Dies ergibt die Behauptung unter Benutzung des Satzes von Radon-Nikodým.

Zum Beweis von (4.2.4) setzen wir als Vergleichsfunktion in die Variationsungleichung, unter Benutzung der Voraussetzung (4.0.1) an  $\underline{u}$ ,

$$v := \max(u - \varepsilon \zeta, \underline{u}) \quad \text{mit } \varepsilon > 0.$$

Dann ist  $u - v = \varepsilon \zeta + w_\varepsilon$ , wenn

$$w_\varepsilon := \min(0, u - \underline{u} - \varepsilon \zeta) \leq 0 ,$$

wobei  $w_\varepsilon = 0$  im Falle, daß  $\underline{u} = -\infty$  in (4.0.1). Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \nabla(u - v) \cdot a \nabla u + (u - v) f \right) \\ &= \int_{\Omega} \left( \nabla \zeta \cdot a \nabla u + \zeta f \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \nabla w_\varepsilon \cdot a \nabla(u - \underline{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \nabla w_\varepsilon \cdot a \nabla \underline{u} + w_\varepsilon f \right) , \end{aligned}$$

wobei die beiden letzten Integrale nur relevant sind, falls das untere Hindernis existiert. Das zweite Integral ist

$$\begin{aligned} &= \int_{\{0 \leq u - \underline{u} < \varepsilon \zeta\}} \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla(u - \underline{u}) - \nabla \zeta \right) \cdot a \nabla(u - \underline{u}) \\ &\geq - \int_{\{0 \leq u - \underline{u} < \varepsilon \zeta\}} \nabla \zeta \cdot a \nabla(u - \underline{u}) \rightarrow - \int_{\{0 = u - \underline{u}\}} \nabla \zeta \cdot a \nabla(u - \underline{u}) = 0 \end{aligned}$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Da  $w_\varepsilon$  kompakten Träger hat und nichtpositiv ist, können wir das dritte Integral als Dualitätsprodukt schreiben. Es ist

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\varepsilon} \langle w_\varepsilon, Lu + f \rangle \geq \frac{1}{\varepsilon} \langle w_\varepsilon, \varphi \rangle \\
 &= \int_{\{0 \leq \frac{u-\underline{u}}{\varepsilon} < \zeta\}} \left( \frac{u-\underline{u}}{\varepsilon} - \zeta \right) \varphi \\
 &= - \int_{\{0 = u-\underline{u}\}} \zeta \varphi + \int_{\{0 < \frac{u-\underline{u}}{\varepsilon} < \zeta\}} \left( \frac{u-\underline{u}}{\varepsilon} - \zeta \right) \varphi.
 \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert das letzte Integral gegen Null, da der Integrand auf der Integrationsmenge gleichmäßig beschränkt ist, und der Integrationsbereich monoton gegen die leere Menge konvergiert. Dies beweist (4.2.4).  $\square$

Die uns interessierende Standardsituation, an der wir uns orientieren, ist

$$(4.2.5) \quad a = \text{Id} \quad , \quad f = 1 \quad , \quad \underline{u} = 0 \quad ,$$

wobei in dem lokalen Bereich, den wir betrachten, das obere Hindernis nicht getroffen werden soll, d.h. wir setzen formal  $\bar{u} = +\infty$ . In dieser Situation bedeutet (4.2.3)

$$0 \leq \varphi \leq \chi_{\{u=0\}} \quad \text{mit} \quad \varphi := -\Delta u + 1 \quad ,$$

oder anders ausgedrückt

$$\chi_{\{u>0\}} \leq \Delta u \leq 1 \quad \text{fast überall in } \Omega.$$

Wir werden später sehen (siehe 4.5), daß in der Tat gilt

$$\Delta u = \chi_{\{u>0\}} \quad \text{fast überall in } \Omega.$$

**4.3 Beispiele.** Wir betrachten die globale eindimensionale Situation  $n = 1$ ,  $\Omega = ]-1, 1[$  mit  $a = 1$ ,  $f = 0$ ,  $\bar{u} = \infty$  und Randwerten  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$ .

(4.3.1) Es sei  $\underline{u} = \chi_{[\alpha, \beta]}$  mit  $-1 < \alpha < \beta < 1$ . Dann hat (siehe Bild 4.1)  $Lu = -u''$  Maßanteile in den Punkten  $\alpha$  und  $\beta$ , ist somit keine Funktion. Dies zeigt, daß die Voraussetzung (4.0.1) nicht nur technischer Natur ist.

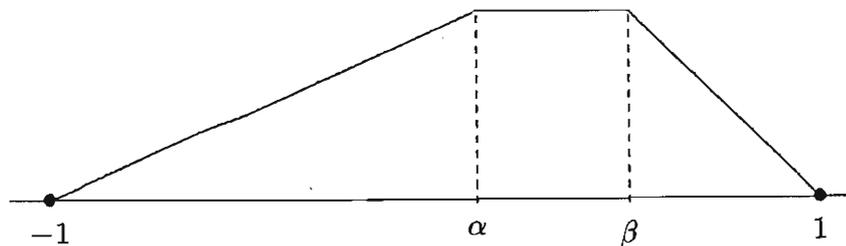


Bild 4.1: Lösung der Variationsungleichung zu (4.3.1)

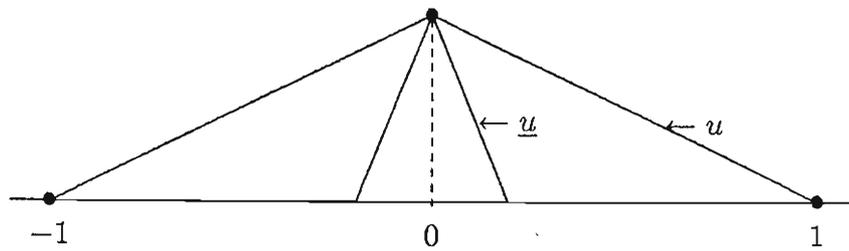


Bild 4.2: Lösung der Variationsungleichung zu (4.3.2)

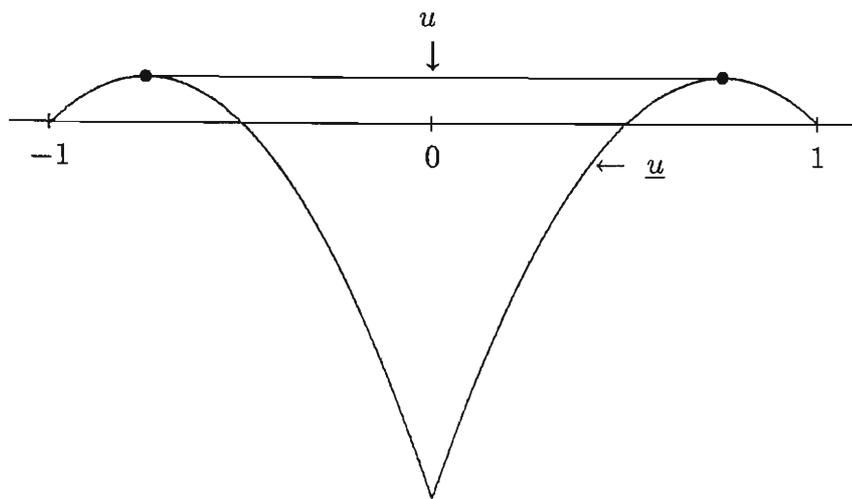


Bild 4.3: Lösung der Variationsungleichung zu (4.3.3)

(4.3.2) Auch das Hindernis

$$\underline{u}(x) := \max\left(0, 1 - \frac{|x|}{\delta}\right) \quad \text{mit } 0 < \delta < 1$$

führt zu einer Lösung  $u$  mit positivem Maßanteil von  $-u''$ , obwohl (4.0.1) erfüllt ist (siehe Bild 4.2). Jedoch hat auch  $-\underline{u}''$  einen positiven Maßanteil bei 0, so daß die Bedingung (4.2.2) verletzt ist.

(4.3.3) Hingegen kann auf die Lösung mit Hindernis

$$\underline{u}(x) := (1 - |x|)(2|x| - 1)$$

die Regularitätsaussage in 4.2 angewandt werden, da  $-\underline{u}''$  nur einen negativen Maßanteil aufweist (siehe Bild 4.3), der die Lösung  $u$  nicht stört.

Als Konsequenz von 4.2 erhalten wir:

**4.4 Folgerungen.** Es sei  $1 < p < \infty$  und  $\underline{\varphi}, \bar{\varphi}$  wie in (4.2.2).

(4.4.1) Setzen wir voraus, daß  $f, \underline{\varphi}, \bar{\varphi} \in L^p_{loc}(\Omega)$ , so impliziert (4.2.3), daß  $Lu \in L^p_{loc}(\Omega)$ . Ist dann zusätzlich  $a \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$ , so folgt

$$u \in H^{2,p}_{loc}(\Omega) .$$

(4.4.2) Sind dann zusätzlich  $\underline{u}, \bar{u} \in H^{2,1}_{loc}(\Omega)$ , so folgt

$$Lu = \begin{cases} -f & \text{fast überall in } \{\underline{u} < u < \bar{u}\}, \\ L\underline{u} & \text{fast überall in } \{u = \underline{u}\}, \\ L\bar{u} & \text{fast überall in } \{u = \bar{u}\}. \end{cases}$$

(4.4.3) Gilt  $\alpha := 1 - \frac{n}{p} > 0$  in (4.4.1) so ist

$$u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega) ,$$

und falls  $\underline{u}, \bar{u} \in C^0(\Omega)$  und  $a \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ ,  $f \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ , so folgt

$$u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\{\underline{u} < u < \bar{u}\}) ,$$

wobei  $\{\underline{u} < u < \bar{u}\}$  eine offene Menge ist.

*Beweis.* Die Aussage  $u \in H^{2,p}_{loc}(\Omega)$  in (4.4.1) folgt aus der Regularitätstheorie linearer elliptischer Operatoren. In (4.4.2) folgt  $Lu + f = 0$  fast überall in  $\{\underline{u} < u < \bar{u}\}$  aus (4.2.3). Besitzen  $u, \underline{u}$   $L^1$ -Ableitungen bis zu zweiter Ordnung, so stimmen diese fast überall auf  $\{u = \underline{u}\}$  überein, insbesondere ist also  $Lu = L\underline{u}$ . Dies beweist (4.4.2). Die erste Aussage in (4.4.3) folgt aus (4.4.1) nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz, und die zweite Aussage wiederum aus der Regularitätstheorie elliptischer Operatoren, da  $Lu = -f \in C^{0,\alpha}_{loc}(\{\underline{u} < u < \bar{u}\})$ .  $\square$

**4.5 Bemerkung.** Unter den Voraussetzungen in (4.4.2) können wir in 4.2 setzen  $\underline{\varphi} = L\underline{u} + f$  und  $\bar{\varphi} = L\bar{u} + f$ , und es folgt dann aus (4.2.3), daß

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &\leq 0 && \text{fast überall in } \{\underline{u} < \bar{u} = u\}, \\ \underline{\varphi} &\geq 0 && \text{fast überall in } \{u = \underline{u} < \bar{u}\}. \end{aligned}$$

Die Aussage (4.4.2) können wir dann auch schreiben als (vgl. die Aussage in 2.15)

$$Lu + f \in \Phi(\cdot, u) \quad \text{fast überall in } \Omega$$

mit der mengenwertigen Funktion

$$\Phi(x, z) := \begin{cases} 0 & \text{für } \underline{u}(x) < z < \bar{u}(x), \\ [0, (L\underline{u} + f)(x)] & \text{für } z \leq \underline{u}(x) < \bar{u}(x), \\ [(L\bar{u} + f)(x), 0] & \text{für } \underline{u}(x) < \bar{u}(x) \leq z, \\ (L\underline{u} + f)(x) = (L\bar{u} + f)(x) & \text{für } \underline{u}(x) = \bar{u}(x). \end{cases}$$

Jedoch sagt (4.4.2), daß Werte im Innern der Intervalle der mengenwertigen Funktion nicht auftreten können, d.h. es gilt

$$(4.5.1) \quad Lu + f = \begin{cases} 0 & \text{in } \{\underline{u} < u < \bar{u}\}, \\ L\underline{u} + f \geq 0 & \text{in } \{u = \underline{u} < \bar{u}\}, \\ L\bar{u} + f \leq 0 & \text{in } \{\underline{u} < \bar{u} = u\}, \\ L\underline{u} + f = L\bar{u} + f & \text{in } \{\underline{u} = \bar{u} = u\}. \end{cases}$$

In 1.7 hatten wir gesehen, daß für die Lösung des Hindernisproblems im allgemeinen  $D^2u$  am freien Rand einen Sprung macht. Damit ist die maximal zu erwartende globale Regularität

$$u \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega) = C_{loc}^{1,1}(\Omega) .$$

Es ist das Ziel, dies mit Hilfe lokaler Analysis zu beweisen (siehe 4.8).

Dazu haben wir das Verhalten der Lösung in der Nähe eines Punktes am freien Rand  $\partial\{u = \underline{u}\}$  zu untersuchen. Dies tun wir, indem wir uns die Lösung in kleinen Kugeln anschauen, d.h. diese kleinen Kugeln auf die Einheitskugel aufblasen. Dies erlaubt uns Eigenschaften zu studieren, die unabhängig von der Kleinheit der Kugeln sind.

**4.6 Skalierung.** Sei  $x_0 \in \Omega$  ein Punkt auf dem unteren freien Rand, d.h.  $u(x_0) = \underline{u}(x_0)$  (im Lebesgue–Sinne, falls keine Stetigkeit vorliegt), und  $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$ . Für  $0 < r \leq r_0$  betrachten wir die auf  $B_1 := B_1(0)$  skalierte Situation, gegeben durch

$$\begin{aligned} u_r(x) &:= \frac{1}{r^2}(u - \underline{u})(x_0 + rx) , \\ a_r(x) &:= a(x_0 + rx) , \\ f_r(x) &:= f(x_0 + rx) . \end{aligned}$$

Dann ist  $u_r \geq 0$  mit

$$\begin{aligned} \nabla u_r(x) &= \frac{1}{r} \nabla(u - \underline{u})(x_0 + rx) , \\ D^2 u_r(x) &= D^2(u - \underline{u})(x_0 + rx) . \end{aligned}$$

Mit dem skalierten Operator  $L_r v := -\nabla \cdot (a_r \nabla v)$  gilt

$$L_r u_r(x) = L(u - \underline{u})(x_0 + rx) ,$$

wobei  $Lv := -\nabla \cdot (a \nabla v)$  wie in (4.2.1). Wir nennen  $u_r$  die skalierten Funktionen (auch: aufgeblasene Funktionen oder blow-up-Funktionen, falls  $r \ll 1$ ).

Als erstes beweisen wir ein quadratisches Wachstumsverhalten der Lösung am freien Rand, was konsistent ist mit der erwarteten Beschränktheit der zweiten Ableitungen. Es bestätigt außerdem die Vermutung, daß  $\nabla(u - \underline{u})(x) \rightarrow 0$  konvergiert, wenn  $x$  gegen  $\partial\{u = \underline{u}\}$  strebt.

**4.7 Satz.** Es sei  $a \in C_{loc}^{0,1}(\Omega)$  sowie  $f, L\underline{u}, L\bar{u} \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ . Für Kugeln  $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$  mit  $u(x_0) = \underline{u}(x_0)$  gilt dann

$$\frac{1}{r^2} |u - \underline{u}| \leq C \quad \text{in } B_{\frac{r}{2}}(x_0) \text{ für } 0 < r < r_0$$

mit einer Konstanten  $C$ , die nicht von  $r$  und lokal in  $\Omega$  nicht von  $x_0$  und  $r_0$  abhängt.

*Beweis.* Für die skalierte Funktion  $u_r$  aus 4.6 haben wir zu zeigen

$$|u_r| \leq C \quad \text{in } B_{\frac{1}{2}},$$

wobei wir zur Abkürzung  $B_s := B_s(0)$  schreiben. Mit der Green'schen Funktion  $G_x$  auf  $B_1$  mit Pol  $x \in B_1$  zum Operator  $L_r$  mit Randwerten 0 auf  $\partial B_1$  hat  $u_r$  für  $x \in B_1$  die Darstellung

$$u_r(x) = \int_{\partial B_1} \alpha_r \partial_{-\nu} G_x \cdot u_r d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{B_1} G_x \cdot L_r u_r d\mathcal{L}^n,$$

wobei im ersten Integral  $\alpha_r := \nu \cdot a_r \nu \geq c > 0$ . Aus den Voraussetzungen an  $f, L\underline{u}, L\bar{u}$  und der Ungleichung (4.2.3) folgt, daß

$$(4.7.1) \quad |L_r u_r| \leq C_0 \quad \text{in } B_1$$

mit einer von  $r, x_0, r_0$  unabhängigen Konstanten  $C_0$ . Daher folgt

$$0 \leq u_r(x) \leq \sup_{\partial B_1} |\nabla G_x| \cdot \int_{\partial B_1} u_r d\mathcal{H}^{n-1} + C \int_{B_1} G_x d\mathcal{L}^n.$$

Wir benutzen nun Abschätzungen für die Green'sche Funktion, die gleichmäßig in  $r, x_0$  und  $r_0$  sind, da der Koeffizient  $a_r$  von  $L_r$  gleichmäßig Lipschitzstetig ist (sogar mit kleiner Lipschitzkonstante, falls  $r$  klein), und auch gleichmäßig positiv definit ist. Es gilt für  $x, y \in B_1$

$$(4.7.2) \quad G_x(y) \leq \begin{cases} C|y-x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3, \\ C \log \frac{4}{|y-x|} & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

und

$$(4.7.3) \quad |\nabla G_x(y)| \leq C \quad \text{für } y \in \partial B_1, x \in B_{\frac{1}{2}}.$$

Damit erhalten wir für  $x \in B_{\frac{1}{2}}$  die Abschätzung

$$|u_r(x)| \leq C \int_{\partial B_1} u_r d\mathcal{H}^{n-1} + C.$$

Es bleibt also der Mittelwert von  $u_r$  über  $\partial B_1$  abzuschätzen. Dazu vergleichen wir  $u_r$  mit  $w_0 - w_1$ , wobei  $w_0$  schwache Lösung der Randwertproblems

$$L_r w_0 = 0 \quad \text{in } B_1, \quad w_0 = u_r \quad \text{auf } \partial B_1$$

ist, und  $w_1$  die Lösung von

$$L_r w_1 = C_0 \quad \text{in } B_1, \quad w_1 = 0 \quad \text{auf } \partial B_1.$$

Dabei ist  $C_0$  die Konstante aus (4.7.1). Da also

$$\begin{aligned} u_r - (w_0 - w_1) &= 0 && \text{auf } \partial B_1, \\ L_r(u_r - (w_0 - w_1)) &\geq 0 && \text{in } B_1 \end{aligned}$$

nach (4.7.1), folgt nach dem schwachen Maximumprinzip

$$u_r - (w_0 - w_1) \geq 0 \quad \text{in } B_1,$$

und insbesondere, da  $u_r(0) = 0$ ,

$$(4.7.4) \quad w_0(0) \leq w_1(0).$$

Mit Hilfe der Green'schen Funktion können wir nun  $w_0$  und  $w_1$  darstellen als

$$\begin{aligned} w_0(x) &= \int_{\partial B_1} \alpha_r \partial_{-\nu} G_x \cdot u_r d\mathcal{H}^{n-1}, \\ w_1(x) &= C_0 \int_{B_1} G_x d\mathcal{L}^n. \end{aligned}$$

Verwenden wir (4.7.2) und die zusätzliche Abschätzung

$$(4.7.5) \quad \partial_{-\nu} G_x(y) \geq c > 0 \quad \text{für } y \in \partial B_1, x \in B_{\frac{1}{2}},$$

so erhalten wir aus (4.7.4), daß

$$c \int_{\partial B_1} u_r d\mathcal{H}^{n-1} \leq w_0(0) \leq w_1(0) \leq C_0 \cdot C,$$

d.h. die gewünschte Abschätzung. □

**4.8 Regularität.** Es sei  $a \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$  und  $f \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ , sowie  $\underline{u}, \bar{u} \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$ . Dann folgt

$$u \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega).$$

Genauer, für Gebiete  $D$  mit  $B_\delta(D) \subset\subset \Omega$  gilt

$$\|u\|_{H^{2,\infty}(D)} \leq C(D, \delta) \left(1 + \|u\|_{L^\infty(B_\delta(D))}\right),$$

und falls die Koinzidenzmenge  $D \cap \{u = \underline{u}\} \cap \{u = \bar{u}\}$  nichtleer ist, gilt

$$\|u\|_{H^{2,\infty}(D)} \leq C(D, \delta),$$

wobei die Konstanten ansonsten nur von den Daten der Variationsungleichung abhängen.

*Beweis.* Es sei

$$K := \Omega \cap (\{u = \underline{u}\} \cup \{u = \bar{u}\}) .$$

Da  $u \in H_{loc}^{2,p}(\Omega)$  für  $p < \infty$  nach (4.4.1), stimmt  $D^2u$  in  $D \cap K$  fast überall mit  $D^2\underline{u}$  bzw.  $D^2\bar{u}$  überein, so daß wir uns auf Punkte  $x_0 \in D \setminus K$  beschränken können. Ist  $x_0 \in D$  mit  $B_r(x_0) \subset D \setminus K$  und  $r \leq \delta$ , so betrachte für eine gegebene affin-lineare Funktion  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Skalierung

$$v(x) := \frac{1}{r^2}(u - l)(x_0 + rx) .$$

Dann sind (gleichmäßig in  $x_0$  und  $r$ )  $L_r v = (\nabla \cdot a_r) \nabla l - f_r$  in  $C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)$  durch  $|\nabla l| + 1$  abgeschätzt und die Koeffizienten  $a_r$  in  $C^{1,\alpha}(\bar{B}_1)$ . Die Schauder-Theorie für lineare elliptische Gleichungen ergibt dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_{\frac{1}{2}})} &\leq C(\|L_r v\|_{C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)} + \|v\|_{C^0(\bar{B}_1)}) \\ &\leq C\left(1 + |\nabla l| + \frac{1}{r^2}\|u - l\|_{C^0(\overline{B_r(x_0)})}\right) , \end{aligned}$$

insbesondere also, wegen  $D^2v(x) = D^2u(x_0 + rx)$ ,

$$(4.8.1) \quad |D^2u(x_0)| \leq C\left(1 + |\nabla l| + \frac{1}{r^2}\|u - l\|_{C^0(\overline{B_r(x_0)})}\right) .$$

Ist nun  $K \cap B_{\frac{\delta}{2}}(D)$  leer, so können wir  $r = \frac{\delta}{2}$  und  $l = 0$  setzen und erhalten die behauptete Abschätzung. Wir haben also im Falle, daß  $K \cap B_{\frac{\delta}{2}}(D)$  nichtleer ist, die  $C^0$ -Norm von  $\frac{1}{r^2}(u - l)$  auf Kugeln mit Mittelpunkt in  $D \setminus K$  und geeigneter Wahl von  $r$  und  $l$  abzuschätzen.

Zunächst betrachten wir Punkte  $x_0 \in D$  mit

$$(4.8.2) \quad r := \text{dist}(x_0, K) \leq \frac{\delta}{4} .$$

Wähle einen Punkt  $x_1 \in K \cap \partial B_r(x_0)$ . Dann ist  $B_{4r}(x_1) \subset B_\delta(D)$  und somit gilt nach Satz 4.7, wenn wir annehmen, daß  $u(x_1) = \underline{u}(x_1)$ ,

$$\frac{1}{r^2}|u - \underline{u}| \leq C \quad \text{in } B_{2r}(x_1) \supset B_r(x_0) .$$

Da  $\underline{u} \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$ , gilt außerdem

$$\frac{1}{r^2}|\underline{u} - l| \leq C \quad \text{in } B_r(x_0),$$

wenn zum Beispiel  $l(x) := \underline{u}(x_0) + (x - x_0) \cdot \nabla \underline{u}(x_0)$ , also

$$(4.8.3) \quad \frac{1}{r^2}|u - l| \leq C \quad \text{in } B_r(x_0),$$

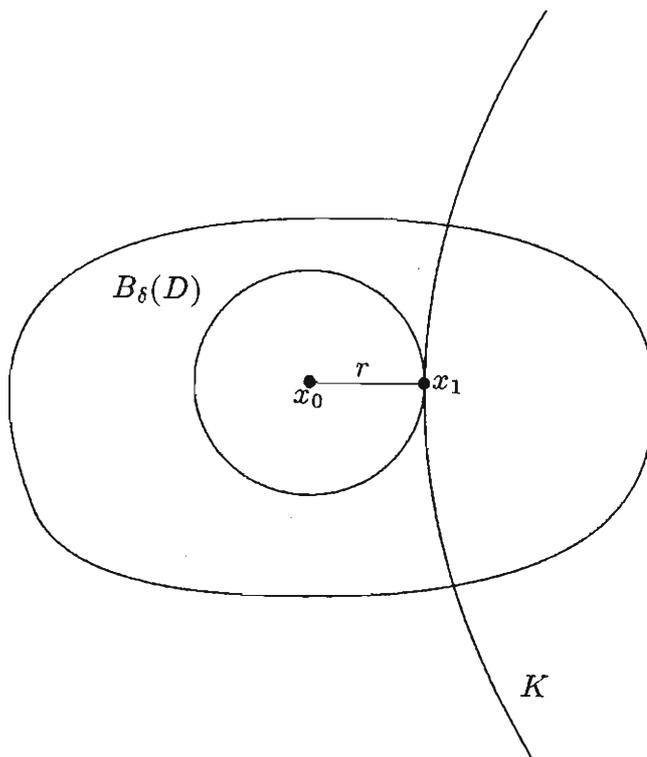


Bild 4.4: Tangentialkugel an Koinzidenzmenge.

womit wir in (4.8.1) gehen können, um  $D^2u(x_0)$  abzuschätzen.

Es bleiben also Punkte  $x_0 \in D \setminus K$  zu betrachten, die nicht (4.8.2) erfüllen. Solche Punkte verbinden wir durch eine Kugelkette mit einem Punkt, für den (4.8.2) erfüllt ist. Da  $K \cap B_{\frac{\delta}{2}}(D)$  nichtleer ist, da  $B_{\frac{\delta}{2}}(D)$  zusammenhängend ist und da  $B_\delta(D) \subset\subset \Omega$ , gibt es eine Folge von Punkten  $x_i \in B_\delta(D)$  mit  $i = 1, \dots, m$ , so daß

$$\begin{aligned} x_i &\in B_{\frac{\delta}{8}}(x_{i-1}) && \text{für } i = 1, \dots, m, \\ K \cap B_{\frac{\delta}{4}}(x_i) &= \emptyset && \text{für } i = 0, \dots, m, \\ K \cap \partial B_{\frac{\delta}{4}}(x_m) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Dabei ist  $m \leq m_0$ , wobei  $m_0$  von  $D$  und  $\delta$ , aber nicht von  $x_0$  abhängt. Wir können annehmen, daß in der letzten Kugel das untere Hindernis getroffen wird, d.h.  $u = \underline{u}$  in einem Punkt auf  $\partial B_{\frac{\delta}{4}}(x_m)$ . Nach Satz 4.7 ist dann wieder

$$(4.8.4) \quad |(u - \underline{u})(x_m)| \leq C(\delta).$$

Für  $i = 0, \dots, m-1$  betrachte mit  $r := \frac{\delta}{4}$  die Skalierungen

$$v(x) := \frac{1}{r^2} (u - \underline{u})(x_i + rx)$$

wie in 4.6. Mit der Green'schen Funktion wie im Beweis von 4.7 hat  $v$  in  $B_1$  die Darstellung

$$v(x) = \int_{\partial B_1} \alpha_r \partial_{-\nu} G_x v \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{B_1} G_x \cdot L_r v \, d\mathcal{L}^n .$$

Mit (4.7.2) und (4.7.3) erhält man dann wieder eine Abschätzung

$$0 \leq v(x) \leq C \left( \int_{\partial B_1} v \, d\mathcal{H}^{n-1} + 1 \right) \quad \text{für } x \in B_{\frac{1}{2}} .$$

Andererseits folgt aus (4.7.5)

$$v(x) \geq c \int_{\partial B_1} v \, d\mathcal{H}^{n-1} - C \quad \text{für } x \in B_{\frac{1}{2}} .$$

Damit erhalten wir die Harnack-Ungleichung

$$0 \leq v(x) \leq C(v(y) + 1) \quad \text{für } x, y \in B_{\frac{1}{2}} .$$

Setzen wir  $x = 0$  und  $y = \frac{x_{i+1} - x_i}{r^2}$ , so ergibt dies

$$(u - \underline{u})(x_i) \leq C((u - \underline{u})(x_{i+1}) + r^2) .$$

Iteration für  $i = 0, \dots, m-1$  (beachte, daß  $m \leq m_0$ ) ergibt unter Ausnutzung von (4.8.4)

$$(u - \underline{u})(x_0) \leq C(\delta, \underline{u}) .$$

Mit obiger Harnack-Ungleichung folgt daraus

$$(u - \underline{u})(x) \leq C(\delta, \underline{u}) \quad \text{für } x \in B_{\frac{\delta}{8}}(x_0),$$

und daher gilt wieder eine Abschätzung wie in (4.8.3). Dann folgt wieder mit (4.8.1) eine Abschätzung für  $D^2 u(x_0)$ .  $\square$

Als Folgerung aus der Abschätzung der zweiten Ableitung erhalten wir die Konvergenz von Blow-up-Funktionen.

**4.9 Blow-up-Limes.** Es mögen die Voraussetzungen in 4.8 erfüllt sein. Betrachte eine Folge von Kugeln

$$B_{\rho_m}(x_m) \rightarrow \{x_0\} \subset \Omega \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

so daß  $B_{\rho_m}(x_m) \cap \{u = \underline{u}\}$  nichtleer ist. Dann gilt:

(4.9.1) Die Skalierungen

$$0 \leq \bar{u}_m(x) := \frac{1}{\rho_m^2} (\bar{u} - \underline{u})(x_m + \rho_m x)$$

konvergieren für eine Teilfolge  $m \rightarrow \infty$  lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$  gegen  $+\infty$ , oder schwach\* in  $H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$  gegen eine Funktion  $\bar{u}_* \geq 0$ . Sind  $D^2\underline{u}$  und  $D^2\bar{u}$  in  $x_0$  stetig, so ist  $\bar{u}_*$  ein Polynom zweiten Grades.

(4.9.2) Ist  $L\underline{u}$  in  $x_0$  stetig, so konvergieren die Skalierungen

$$0 \leq u_m(x) := \frac{1}{\rho_m^2}(u - \underline{u})(x_m + \rho_m x) \leq \bar{u}_m(x)$$

für eine Teilfolge  $m \rightarrow \infty$  schwach\* in  $H_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$  gegen eine Funktion  $u_*$  mit  $0 \leq u_* \leq \bar{u}_*$ . Es ist  $D^2u_* \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $u_*$  löst die Variationsungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla(u_* - v) \cdot a_* \nabla u_* + (u_* - v)f_*) \leq 0$$

für alle  $v \in H^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  mit  $0 \leq v \leq \bar{u}_*$ , für die  $u_* - v$  kompakten Träger hat. Dabei ist

$$a_* := a(x_0) \quad , \quad f_* := L\underline{u}(x_0) + f(x_0) .$$

Die Blow-up-Variationsungleichung ist somit eine globale Variationsungleichung auf  $\mathbb{R}^n$  mit konstanten Koeffizienten.

*Beweis.* Falls  $\bar{u}_m$  nicht lokal gleichmäßig gegen  $+\infty$  strebt, so gibt es Punkte  $y_m \in \mathbb{R}^n$  mit

$$0 \leq \bar{u}_m(y_m) \leq C \quad , \quad |y_m| \leq C .$$

Dann gilt für  $y \in \mathbb{R}^n$

$$(4.9.3) \quad 0 \leq \bar{u}_m(y) = \bar{u}_m(y_m) + (y - y_m) \cdot \nabla \bar{u}_m(y_m) + (y - y_m) \cdot B_m(y)(y - y_m) ,$$

wobei die Matrix

$$B_m(y) := \int_0^1 \int_0^t D^2(\bar{u} - \underline{u})(x_m + \rho_m((1-s)y_m + sy)) ds dt$$

gleichmäßig in  $m$  lokal in  $\mathbb{R}^n$  beschränkt ist, denn  $D^2(\bar{u} - \underline{u})$  ist nahe  $x_0$  beschränkt. Daraus folgt eine Abschätzung

$$(y - y_m) \cdot \nabla \bar{u}_m(y_m) \geq -C(1 + |y - y_m|^2)$$

lokal in  $y$ , weshalb

$$|\nabla \bar{u}_m(y_m)| \leq C$$

sein muß. Daher gibt es  $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ , so daß für eine Teilfolge  $m \rightarrow \infty$

$$y_m \rightarrow \bar{y}_0 \quad , \quad \bar{u}_m(y_m) \rightarrow \bar{u}_0 \quad , \quad \nabla \bar{u}_m(y_m) \rightarrow \bar{v}_0 .$$

Außerdem existiert ein  $\bar{B}_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n \times n})$ , so daß

$$B_m \rightarrow \bar{B}_0 \quad \text{schwach* in } L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Somit ergibt (4.9.3) die schwach\*-Konvergenz in  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$  von  $\bar{u}_m$  gegen

$$\bar{u}_*(y) := \bar{u}_0 + (y - \bar{y}_0) \cdot \bar{v}_0 + (y - y_0) \cdot \bar{B}_0(y)(y - y_0) .$$

Ist  $D^2(\bar{u} - \underline{u})$  in  $x_0$  stetig, so muß  $\bar{B}_0(y) = D^2(\bar{u} - \underline{u})(x_0)$  sein, d.h.  $\bar{u}_*$  ist ein Polynom zweiten Grades. Da außerdem

$$\begin{aligned} \nabla \bar{u}_m(y) &= \nabla \bar{u}_m(y_m) + \tilde{B}_m(y)(y - y_m) , \\ D^2 \bar{u}_m(y) &= \tilde{\tilde{B}}_m(y) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{B}_m(y) &:= \int_0^1 D^2(\bar{u} - \underline{u})(x_m + \rho_m((1-t)y_m + ty)) dt , \\ \tilde{\tilde{B}}_m(y) &:= D^2(\bar{u} - \underline{u})(x_m + \rho_m y) , \end{aligned}$$

folgt entsprechend die schwach\*-Konvergenz der ersten und zweiten Ableitungen von  $\bar{u}_m$ . Außerdem zeigt dies, daß  $\bar{u}_m$  in  $H_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$  beschränkt ist, und daher  $\bar{u}_m \rightarrow \bar{u}_*$  in  $C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  für jedes  $0 < \alpha < 1$ .

Zum Beweis von (4.9.2) notieren wir zunächst die skalierte Variationsungleichung

$$(4.9.4) \quad \int_{\Omega_m} (\nabla(u_m - v) \cdot a_m \nabla u_m + (u_m - v)f_m) \leq 0$$

für alle  $v \in H^{1,2}(\Omega_m)$  mit  $0 \leq v \leq \bar{u}_m$ , so daß  $u_m - v$  kompakten Träger in  $\Omega_m$  hat. Dabei ist

$$\begin{aligned} \Omega_m &:= \{x \in \mathbb{R}^n ; x_m + \rho_m x \in \Omega\} , \\ a_m(x) &:= a(x_m + \rho_m x) , \\ f_m(x) &:= (L\underline{u} + f)(x_m + \rho_m x) . \end{aligned}$$

Nun ist für Gebiete  $D \subset\subset \mathbb{R}^n$  die Funktion  $u_m$  auf  $D$  definiert für große  $m$  und nach 4.8 sind  $D^2 u_m$  in  $L^\infty(D)$  beschränkt. Da es Punkte  $y_m \in B_{\rho_m}(x_m)$  mit  $u(y_m) = \underline{u}(y_m)$  gibt und da  $B_{r_0}(y_m) \subset \Omega$  für ein festes  $r_0 > 0$ , besagt die Abschätzung in 4.7, umgeschrieben auf  $u_m$ , daß

$$0 \leq u_m \leq C \quad \text{für große } m \text{ in } D .$$

Da mit  $\tilde{y}_m := \frac{y_m - x_m}{\rho_m}$  gilt  $u_m(\tilde{y}_m) = 0$  und daher auch  $\nabla u_m(\tilde{y}_m) = 0$  (es sind  $u, \underline{u} \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$ ), folgt

$$\|u_m\|_{H^{2,\infty}(D)} \leq C \quad \text{für große } m .$$

Daher gibt es ein  $u_* \in H_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ , so daß für eine Teilfolge  $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} D^2 u_m &\rightarrow D^2 u_* && \text{schwach* in } L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n), \\ u_m &\rightarrow u_* && \text{stark in } C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \text{ für } 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

Dann bereitet es keine Schwierigkeiten, in der Variationsungleichung (4.9.4) zum Limes überzugehen. In der Tat, ist  $v = u_* + \zeta$  mit einem  $\zeta \in H^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ , das kompakten Träger hat, so daß  $0 \leq v \leq \bar{u}_*$ , so sind:

$$v_m := \max(0, \min(\bar{u}_m, u_m + \zeta))$$

zulässig in (4.9.4). Da der Träger von  $u_m - v_m$  im Träger von  $\zeta$  enthalten ist, und da

$$u_m - v_m \rightarrow \zeta \quad \text{in } C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \text{ für } 0 < \alpha < 1$$

konvergieren alle Ausdrücke im Integranden von (4.9.4) gleichmäßig gegen den gewünschten Limes.

Daß  $D^2 u_* \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|D^2 u_*\|_{L^\infty(B_R(0))} &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|D^2 u_m\|_{L^\infty(B_R(0))} \\ &= \liminf_{m \rightarrow \infty} \|D^2 u\|_{L^\infty(B_{\rho_m R}(x_m))} \leq C, \end{aligned}$$

wobei  $C$  von  $R$  unabhängig ist, da  $u \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$  nach 4.8. □

Der globale Blow-up-Limes  $u_*$  trägt keine Information über die Lösung  $u$  nahe  $x_0$ , falls er trivial ist, d.h. falls  $u_* = 0$ . Daher ist es unser Ziel, die Nichttrivialität gewisser Funktionen  $u_*$  nachzuweisen.

Zur Erläuterung betrachte diesen Limes im Falle konzentrischer Kugeln  $B_{\rho_m}(x_0) \rightarrow \{x_0\}$ , und im Falle, daß  $\underline{u}, \bar{u} \in C^2(\Omega)$ . Es mögen sich oberes und unteres Hindernis berühren, d.h.  $\bar{u}(x_0) = \underline{u}(x_0)$ . Da  $\bar{u} \geq \underline{u}$ , gilt

$$\partial_{ee}(\bar{u} - \underline{u})(x_0) \geq 0 \quad \text{für jede Richtung } e \in \mathbb{R}^n.$$

Gilt Gleichheit für alle  $e$ , so ist  $D^2 \bar{u}(x_0) = D^2 \underline{u}(x_0)$ , woraus folgt, daß  $u_* = 0$ . Ein nichttrivialer Blow-up-Limes kann also nur auftreten, wenn

$$\partial_{ee}(\bar{u} - \underline{u})(x_0) > 0 \quad \text{für eine Richtung } e \in \mathbb{R}^n.$$

Falls  $a$  symmetrisch ist, folgt daraus  $L(\bar{u} - \underline{u})(x_0) < 0$ , also

$$(L\underline{u} + f)(x_0) > (L\bar{u} + f)(x_0).$$

Falls sich die Hindernisse nicht berühren, d.h. falls  $\underline{u}(x_0) < \bar{u}(x_0)$ , so muß gelten (vgl. (4.5.1) )

$$(L\underline{u} + f)(x_0) \geq 0.$$

Denn sonst wäre  $(L\underline{u} + f) < 0$  in einer Umgebung  $B_r(x_0)$ . Vergleiche dann dort  $u$  mit der Lösung  $v$  von

$$\begin{aligned} Lv + f &= 0 && \text{in } B_r(x_0) \\ v &= \underline{u} && \text{auf } \partial B_r(x_0). \end{aligned}$$

Nach dem Maximumprinzip ist  $v > \underline{u}$  in  $B_r(x_0)$ , und da  $Lu + f \geq 0$  nach (4.2.3) (wir nehmen an, daß  $u < \bar{u}$  in  $B_r(x_0)$ ), folgt ebenfalls nach dem Maximumprinzip, daß  $v \leq u$ , insgesamt also  $u(x_0) \geq v(x_0) > \underline{u}(x_0)$ , ein Widerspruch zur Wahl von  $x_0$ . Wir können folgendes hinreichende Kriterium für die Nichttrivialität des Blow-up-Limes angeben:

**4.10 Nichtentartung.** Es mögen die Voraussetzungen in 4.8 erfüllt sein. Weiter gelte

$$L\underline{u} + f \geq \lambda > 0 \quad \text{in } \Omega \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$

und es sei  $B_r(x_0) \subset \Omega$ . Dann gibt es eine (von  $x_0, r$  und  $\lambda$  unabhängige) kleine Konstante  $c > 0$ , so daß

$$\frac{1}{r^2} \sup_{\partial B_r(x_0)} (u - \underline{u}) \leq c\lambda \quad \Rightarrow \quad u = \underline{u} \quad \text{in } B_{\frac{r}{2}}(x_0).$$

*Beweis.* Nach (4.5.1) gilt

$$Lu + f = \begin{cases} L\underline{u} + f & \text{in } \{u = \underline{u}\}, \\ 0 & \text{in } \{\underline{u} < u < \bar{u}\}, \\ L\bar{u} + f \leq 0 & \text{in } \{\underline{u} < u = \bar{u}\}, \end{cases}$$

somit erfüllt  $v := u - \underline{u}$  die Differentialungleichung

$$(4.10.1) \quad Lv \leq -\lambda \chi_{\{u > \underline{u}\}} \leq 0.$$

Falls die Menge

$$D := B_r(x_0) \cap \{u > \underline{u}\},$$

nichtleer ist, wähle  $x_1 \in D$  und betrachte die Funktion

$$w(x) := v(x) - v(x_1) - \delta\lambda|x - x_1|^2,$$

wobei  $\delta > 0$ . Wegen (4.10.1) gilt in  $D$

$$\begin{aligned} Lw &\leq -\lambda - 2\delta\lambda \nabla_x \cdot (a(x)(x - x_1)) \\ &\leq -\lambda + C \cdot \delta\lambda \leq 0, \end{aligned}$$

falls  $\delta$  klein genug gewählt ist. Nach dem Maximumprinzip gilt daher

$$\sup_D w \leq \sup_{\partial D} w.$$

Nun ist  $w(x_1) = 0$ , also  $\sup_D w \geq 0$ , und außerdem  $w < 0$  auf  $B_r(x_0) \cap \partial D$ , woraus folgt

$$(4.10.2) \quad 0 \leq \sup_{D \cap \partial B_r(x_0)} w.$$

Falls  $x_1$  in  $B_{\frac{r}{2}}(x_0)$  gewählt werden kann, erhalten wir also aus (4.10.2)

$$\begin{aligned} \sup_{\partial B_r(x_0)} v &\geq v(x_1) + \inf\{\delta\lambda|x-x_1|^2; x \in \partial B_r(x_0)\} \\ &\geq \frac{\delta}{4}\lambda r^2, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

Aus der gerade bewiesenen Aussage ergeben sich einige interessante Folgerungen. In (4.11.1) geben wir an, wie  $u - \underline{u}$  quadratisch mit dem Abstand vom freien Rand  $\partial\{u - \underline{u} > 0\}$  wächst, und in (4.11.2) beweisen wir, daß  $\{u - \underline{u} > 0\}$  in allen Punkten dieses freien Randes eine positive Dichte hat.

**4.11 Folgerungen.** Es mögen die Voraussetzungen in 4.10 erfüllt sein und es sei  $x_0 \in \partial\{u > \underline{u}\}$  mit  $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ . Dann gilt mit  $\tilde{\lambda} := \min(\lambda, 1)$ :

$$(4.11.1) \quad u - \underline{u} \geq c\lambda r^2 \quad \text{auf } B_{\kappa\tilde{\lambda}r}(x_1) \text{ für ein } x_1 \in \partial B_r(x_0),$$

$$(4.11.2) \quad \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x_0) \cap \{u > \underline{u}\})}{\mathcal{L}^n(B_r(x_0))} \geq c\tilde{\lambda}^n > 0.$$

Dabei sind  $c, \kappa > 0$  kleine, von  $x_0, r$  und  $\lambda$  unabhängige Konstanten.

*Beweis.* Da  $x_0$  ein Punkt auf dem freien Rand ist, folgt aus 4.10 (beachte, daß  $u, \underline{u}$  stetig sind), daß mit  $v := u - \underline{u}$

$$v(x_1) \geq c\lambda r^2 \quad \text{für ein } x_1 \in \partial B_r(x_0).$$

Da  $u, \underline{u} \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$  sind, folgt dann für  $x$  nahe  $x_1$

$$(4.11.3) \quad v(x) = v(x_1) + (x - x_1) \cdot \nabla v(x_1) + \mathcal{O}(|x - x_1|^2).$$

Nun ist  $v \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$  nichtnegativ mit  $v(x_0) = 0$ , woraus  $\nabla v(x_0) = 0$  folgt, also

$$\nabla v(x_1) = \nabla v(x_0) + \mathcal{O}(|x_1 - x_0|) = \mathcal{O}(r).$$

Damit ergibt (4.11.3), falls  $|x - x_1| \leq \kappa\tilde{\lambda}r$  mit  $0 < \kappa \leq 1$

$$\begin{aligned} v(x) &\geq v(x_1) - Cr|x - x_1| - C|x - x_1|^2 \\ &\geq c\lambda r^2 - C\kappa\lambda r^2 \\ &= (c - C\kappa)\lambda r^2 \geq \frac{c}{2}\lambda r^2, \end{aligned}$$

falls  $\kappa$  klein genug. Dies beweist (4.11.1). Die Aussage (4.11.2) ist eine Konsequenz, da  $B_{\kappa\tilde{\lambda}r}(x_1) \subset \{u > \underline{u}\}$ .  $\square$

Darüberhinaus ergeben sich folgende Aussagen über den Blow-up-Limes.

**4.12 Folgerungen.** Unter den Voraussetzungen in 4.10 gilt für Blow-up-Folgen  $u_m$  wie in (4.9.2):

(4.12.1) Ist  $u_* = 0$  in  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $D' \subset\subset D$ , so gilt  $u_m = 0$  in  $D'$  für große  $m$ .

(4.12.2) Jeder Blow-up-Limes  $u_*$  bezüglich Kugeln  $B_{\rho_m}(x_m)$  mit  $x_m \in \Omega \cap \partial\{u > \underline{u}\}$  ist nichttrivial. Es gilt  $0 \in \partial\{u_* > 0\}$ .

*Beweis.* Sei  $x_0 \in \overline{D'}$  und  $B_{r_0}(x_0) \subset\subset D$ . Da  $u_m \rightarrow u_*$  gleichmäßig auf  $\overline{D}$ , gilt  $u_m \leq \delta$  auf  $\overline{B_{r_0}(x_0)}$  für große  $m$  bei gegebenem  $\delta > 0$ . Also ist

$$u - \underline{u} \leq \delta \rho_m^2 \quad \text{in } B_{\rho_m r_0}(x_m + \rho_m x_0).$$

Wählen wir  $\delta \leq c\lambda r_0^2$ , so folgt nach 4.10

$$u - \underline{u} = 0 \quad \text{in } B_{\frac{\rho_m r_0}{2}}(x_m + \rho_m x_0),$$

d.h.  $u_m = 0$  in  $B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)$ . Eine Überdeckung von  $\overline{D'}$  mit solchen Kugeln ergibt dann (4.12.1). Zum Beweis von (4.12.2) benutze (4.11.1), d.h. für  $r > 0$  gilt für große  $m$

$$\sup_{\partial B_{r\rho_m}(x_m)} (u - \underline{u}) \geq c\lambda(r\rho_m)^2,$$

beziehungsweise

$$\sup_{\partial B_r(0)} u_m \geq c\lambda r^2.$$

Da  $u_m \rightarrow u_*$  gleichmäßig, folgt auch

$$\sup_{\partial B_r(0)} u_* \geq c\lambda r^2 > 0,$$

d.h.  $u_*$  ist nichttrivial. Da  $u_*(0) = 0$  folgt, wenn wir  $r \rightarrow 0$  konvergieren lassen, daß  $0 \in \partial\{u_* > 0\}$ .  $\square$

Damit ist der erste Teil dieses Abschnittes abgeschlossen, der die maximale Regularität in  $H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$  der Lösung  $u$  der Variationsungleichung betraf. Im folgenden möchten wir die Regularität des freien Randes  $\partial\{u > \underline{u}\}$  untersuchen, und zwar dort, wo die Hindernisse lokal nicht zusammenstoßen. Wir transformieren das Problem, wie auch schon in den letzten Aussagen immer  $u - \underline{u}$  betrachtet wurde, indem wir das untere Hindernis von der Lösung abziehen, und machen daher von nun an die folgenden

**4.13 Voraussetzungen.** Es sei  $\underline{u} = 0$  und  $\bar{u} = \infty$ , sowie  $a \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$  und  $f \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$  für ein  $0 < \alpha < 1$ . Weiter gelte (in Konsistenz mit 4.10)

$$f \geq \lambda > 0 \quad \text{in } \Omega \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nach 4.5 erfüllt die Lösung  $u \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$  somit

$$Lu = \begin{cases} -f \leq -\lambda & \text{fast überall in } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{fast überall in } \{u = 0\}. \end{cases}$$

Weiterhin ist  $u \in C_{loc}^{2,\alpha}(\{u > 0\})$  nach der linearen Regularitätstheorie.

Um Aussagen über den freien Rand  $\partial\{u > 0\}$  treffen zu können, benötigen wir weitere strukturelle Eigenschaften von Blow-up-Limiten, die es erlauben diese Limiten zu charakterisieren. Wir werden beweisen, daß jeder Blow-up-Limes eine konvexe Funktion ist. Dies wird eine Folgerung des folgenden Lemmas sein.

**4.14 Lemma.** Es gilt für  $D \subset\subset \Omega$

$$\operatorname{ess} \liminf_{r \rightarrow 0} \{ \partial_{ee} u(x) ; |e| = 1, |x - x_0| \leq r \text{ für ein } x_0 \in \overline{D} \cap \partial\{u > 0\} \} \geq 0 .$$

*Beweis.* Es bezeichne  $s$  den Limes in der Behauptung. Wir nehmen an, daß  $s < 0$ . Wähle Punkte  $x_m, x_{0m}, e_m$  wie angegeben mit  $|x_m - x_{0m}| \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  und

$$(4.14.1) \quad \partial_{e_m e_m} u(x_m) \rightarrow s < 0 .$$

Dazu ist zu bemerken, daß wir uns auf Punkte  $x_m$  mit  $u(x_m) > 0$  beschränken können, denn  $D^2 u = 0$  fast überall in  $\{u = 0\}$ . In einer Umgebung eines solchen Punktes ist  $u$  von der Klasse  $C^{2,\alpha}$ , so daß  $\partial_{e_m e_m} u$  im Punkte  $x_m$  definiert ist. Außerdem können wir ohne Einschränkung  $x_{0m} \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$  so wählen, daß

$$\rho_m := |x_m - x_{0m}| = \operatorname{dist}(x_m, \partial\{u > 0\}) .$$

Wir wählen eine Teilfolge, so daß die Skalierungen  $u_m$  bezüglich  $B_{\rho_m}(x_m)$  gemäß (4.9.2) schwach\* in  $H_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$  und stark in  $C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  gegen einen Blow-up-Limes  $u_*$  konvergieren. Wir können die Teilfolge so wählen, daß  $x_{0m} \rightarrow x_0 \in \overline{D} \cap \partial\{u > 0\}$ ,  $e_m \rightarrow e \in \mathbb{R}^n$  mit  $|e| = 1$ . Da  $\nabla \cdot (a \nabla u) = f$  in  $\{u > 0\}$ , folgt

$$\nabla \cdot (a_m \nabla u_m) = f_m \quad \text{in } \{u_m > 0\} \supset B_1(0),$$

wobei  $a_m(x) := a(x_m + \rho_m x)$  und  $f_m(x) := f(x_m + \rho_m x)$ . Da  $\rho_m \rightarrow 0$ ,  $x_m \rightarrow x_0$  und  $u_m \rightarrow u_*$  gleichmäßig, folgt daraus, daß

$$(4.14.2) \quad \nabla \cdot (a(x_0) \nabla u_*) = f(x_0) \quad \text{in } D := \{u_* > 0\} \cup B_1(0).$$

Da außerdem  $a_m \rightarrow a(x_0)$  in  $C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^n)$  und  $f_m \rightarrow f(x_0)$  in  $C_{loc}^{0,\beta}(\mathbb{R}^n)$  für  $0 < \beta < \alpha$ , folgt aus der elliptischen Theorie, daß

$$u_m \rightarrow u_* \quad \text{in } C_{loc}^{2,\beta}(D).$$

Nach Definition von  $s$  gilt daher

$$(4.14.3) \quad \partial_{ee} u_* \geq s \quad \text{in } D$$

und nach Wahl der  $x_m$  in (4.14.1)

$$(4.14.4) \quad \partial_{ee} u_*(0) = s .$$

Nun erhalten wir durch Differenzieren der Gleichung (4.14.2) (mit konstanten Koeffizienten (!)), daß

$$\nabla \cdot (a(x_0) \partial_{ee} u_*) = 0.$$

Zusammen mit (4.14.3) und (4.14.4) folgt daher nach dem starken Maximumprinzip, daß

$$(4.14.5) \quad \partial_{ee} u_* = s \quad \text{in } D_*,$$

wenn  $D_*$  diejenige Zusammenhangskomponente von  $D$  bezeichnet, die den Punkt  $x_*$  enthält.

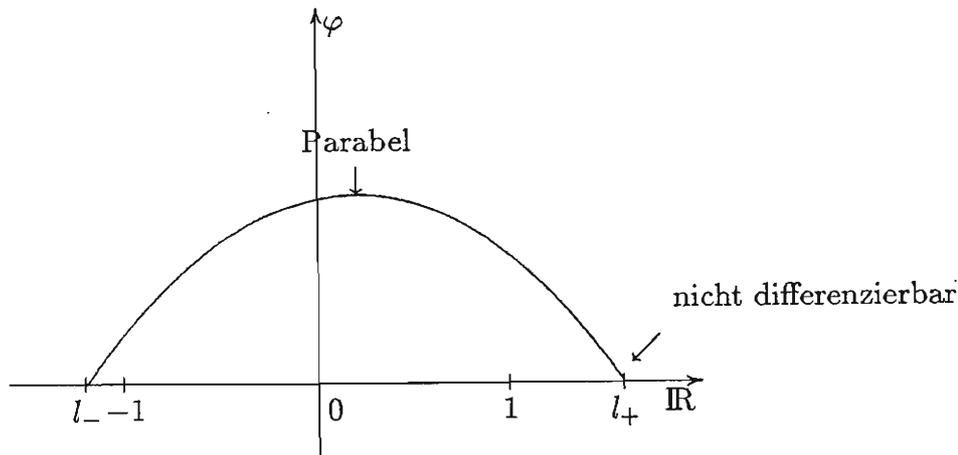


Bild 4.5: Zum Beweis von 4.14.

Wir betrachten nun die Funktion

$$\varphi(t) := u_*(te)$$

auf dem maximalen Intervall  $]l_-, l_+[ \subset ]-\infty, \infty]$ , für das gilt

$$x_* + te \in D_* \quad \text{für alle } t \in ]l_-, l_+[.$$

Offensichtlich ist  $\varphi \in C^{2,\alpha}(]l_-, l_+[)$  und wegen (4.14.5) gilt  $\varphi'' = s < 0$ , d.h.  $\varphi$  beschreibt eine konkave Parabel. Außerdem ist  $\varphi \geq 0$ , da  $u_*$  nichtnegativ auf  $\mathbb{R}^n$ . Es folgt daß  $\varphi > 0$  in  $]l_-, l_+[$ . Wäre nun  $l_+ < \infty$  mit  $\varphi(l_+) > 0$ , so ist  $u_*(l_+e) > 0$ , also  $u_* > 0$  in einer Umgebung dieses Punktes, die dann zu  $D_*$  gehören müßte, was ein Widerspruch zur Definition von  $l_+$  wäre. Also muß  $\varphi(l_+) = 0$  sein, falls  $l_+ < \infty$ , entsprechend  $\varphi(l_-) = 0$  falls  $l_- > -\infty$ . Da aber der Positivitätsbereich obiger Parabel endlich sein muß, folgt, daß in der Tat  $]l_-, l_+[$  ein endliches Intervall sein muß mit  $\varphi'(l_-) > 0$  und  $\varphi'(l_+) < 0$ . Dann kann aber  $u_*$  in den Punkten  $l_-e$  und  $l_+e$  nicht differenzierbar sein, im Widerspruch zu  $u_* \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**4.15 Folgerung.** Jeder Blow-up-Limes  $u_*$  aus (4.9.2) bezüglich Kugeln  $B_{\rho_m}(x_m)$  mit  $x_m \in \partial\{u > 0\}$  ist eine konvexe Funktion.

*Beweis.* Seien  $u_m$  die zugehörigen Blow-up-Funktionen. Da  $B_{\rho_m}(x_m)$  in einer kompakten Teilmenge von  $\Omega$  liegen, folgt aus 4.14 daß für jedes  $e \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{ess\,lim\,inf}_{m \rightarrow \infty} \partial_{ee} u_m \geq 0 \quad \text{lokal in } \mathbb{R}^n,$$

woraus folgt

$$\partial_{ee} u_* \geq 0 \quad \text{fast überall in } \mathbb{R}^n.$$

Dies impliziert die Konvexität von  $u_*$ . □

**4.16 Bemerkung.** Sei  $u_*$  ein Blow-up-Limes wie in 4.15. Da  $u_* \geq 0$ , ist dann insbesondere  $\{u_* = 0\}$  eine konvexe Menge. Für konvexe Mengen ist eine Dimension erklärt, nämlich genau das Minimum über die Dimensionen derjenigen affin-linearen Unterräume, die die konvexe Menge enthalten.

Falls  $\dim\{u_* = 0\} < n$ , so ist  $\mathcal{L}^n(\{u_* = 0\}) = 0$ , die Koinzidenzmenge also eine Lebesgue-Nullmenge, und daher ist  $u_*$  (falls  $x_m \rightarrow x_0 \in \Omega$ ) schwache Lösung von

$$\nabla \cdot (a(x_0) \nabla u_*) = f(x_0) \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

denn da  $u \in H_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$  gilt diese Gleichung fast überall in  $\{u_* > 0\}$  und somit fast überall auf  $\mathbb{R}^n$ . Die Regularitätstheorie liefert dann, daß  $u_* \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Da die zweiten Ableitungen  $\partial_{ij} u_*$  auf  $\mathbb{R}^n$  beschränkt sind (siehe (4.9.2)) und

$$\nabla \cdot (a(x_0) \partial_{ij} u_*) = 0,$$

folgt nach dem Satz von Liouville, daß

$$\partial_{ij} u_* = b_{ij} = \text{const}.$$

Zusammen mit  $u_*(0) = 0$ ,  $\nabla u_*(0) = 0$  folgt daher

$$u_*(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j,$$

bzw. wenn  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix  $(b_{ij})_{i,j}$  mit Eigenwerten  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  sind,

$$(4.16.1) \quad u_*(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{(x \cdot e_k)^2}{2}.$$

Da  $u_* \geq 0$ , müssen daher  $\lambda_k \geq 0$  sein. Die Koinzidenzmenge ist dann der Unterraum

$$\operatorname{span}\{e_k ; \lambda_k = 0\}.$$

Im Falle  $\dim\{u_* = 0\} = n$  gibt es als weitere nichttriviale Lösungen noch die Funktionen

$$u_*(x) := \frac{f(x_0)}{2e \cdot a(x_0)e} \max(x \cdot e, 0)^2,$$

wobei  $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Wir nennen diese Lösungen Halbraumlösungen, da

$$\{u_* = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n ; x \cdot e \leq 0\} .$$

Wir wollen nun zeigen, daß jede konvexe Lösung, also z.B. ein Blow-up, in jedem Punkte aussieht wie eine Halbraumlösung.

**4.17 Satz.** Sei  $u$  eine konvexe lokale Lösung der Variationsungleichung (4.1.1) auf einer konvexen Menge  $\Omega$  und  $\dim\{u = 0\} = n$ . Für  $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$  existiert dann ein eindeutiger Blow-up-Limes bezüglich der Kugeln  $B_\rho(x_0)$  für  $\rho \rightarrow 0$ . Dieser Limes ist eine Halbraumlösung.

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $x_0 = 0$  und  $\Omega = B_1(0)$ . Für  $0 < \rho < 1$  betrachten wir die Skalierungen

$$u_\rho(x) := \frac{1}{\rho^2} u(\rho x)$$

mit den Koinzidenzmengen

$$K_\rho := B_{\frac{1}{\rho}}(0) \cap \{u_\rho = 0\} .$$

Da  $u$ , also auch  $\{u = 0\}$  konvex ist mit  $u(0) = 0$ , muß

$$(4.17.1) \quad K_\rho \subset K_{\tilde{\rho}} \quad \text{für } \rho \geq \tilde{\rho} > 0$$

gelten, und  $K_\rho$  sind konvexe Mengen. Daher ist

$$K := \overline{\bigcup_{\rho > 0} K_\rho}$$

eine abgeschlossene konvexe Menge mit  $0 \in K$ . Außerdem ist  $K$  ein Kegel mit Spitze 0, denn ist  $x \in K$ , so gibt es eine Folge  $\rho \rightarrow 0$  mit Punkten  $x_\rho \in K_\rho$  und  $x_\rho \rightarrow x$ . Ist dann  $\alpha > 0$ , so sind  $\alpha x_\rho \in K_{\tilde{\rho}}$ , wenn  $\tilde{\rho} := \frac{\rho}{\alpha}$ , mit  $\alpha x_\rho \rightarrow \alpha x$ , also ist auch  $\alpha x \in K$ .

Wir geben nun eine Nullfolge  $\rho_m \searrow 0$  für  $m \nearrow \infty$  vor. Eine Teilfolge von  $(u_{\rho_m})_{m \in \mathbb{N}}$  hat dann nach (4.9.2) einen Blow-up-Limes  $u_*$ . Wegen (4.17.1) und der Definition von  $K$  ist dann offensichtlich  $u_* = 0$  in  $K$ . Wir zeigen nun, daß

$$(4.17.2) \quad \{u_* = 0\} = K .$$

Sei dazu  $u_*(x) = 0$ . Da  $\{u = 0\}$   $n$ -dimensional ist, hat diese Menge ein nichtleeres Inneres. Sei  $B_r(x_1) \subset \{u = 0\}$ . Da  $\{u = 0\}$  konvex ist und 0 enthält, ist  $B_{\rho r}(\rho x_1) \subset \{u = 0\}$ , also  $u_\rho = 0$  in der Kugel  $B_r(x_1)$  für jedes  $\rho$ , also auch  $u_* = 0$ . Sei  $x_t := (1-t)x + tx_1$  für  $0 < t < 1$ . Da  $u_*$  als Limes von konvexen Funktionen konvex ist, also auch  $\{u_* = 0\}$ , folgt daß

$$u_* = 0 \quad \text{in } B_{tr}(x_t) \text{ für } 0 < t < 1 .$$

Nach dem Nichtentartungslemma (siehe (4.12.1)) folgt daraus, daß  $u_{\rho_m} = 0$  in  $B_{\frac{t_r}{2}}(x_t)$  für große  $m$  (abhängig von  $t$ ), d.h.

$$B_{\frac{t_r}{2}}(x_t) \subset K_{\rho_m} \quad \text{für große } m.$$

Damit ist aber  $x_t \in K$  und für  $t \rightarrow 0$  erhalten wir, daß  $x \in K$ . Damit ist (4.17.2) bewiesen. Als nächstes möchten wir beweisen, daß gilt:

$$(4.17.3) \quad K \text{ ist ein Halbraum.}$$

Dazu beweisen wir zunächst, daß

$$(4.17.4) \quad \partial_e u_* > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus K \text{ für } e \in \mathbb{R}^n \text{ mit } -e \in \overset{\circ}{K}.$$

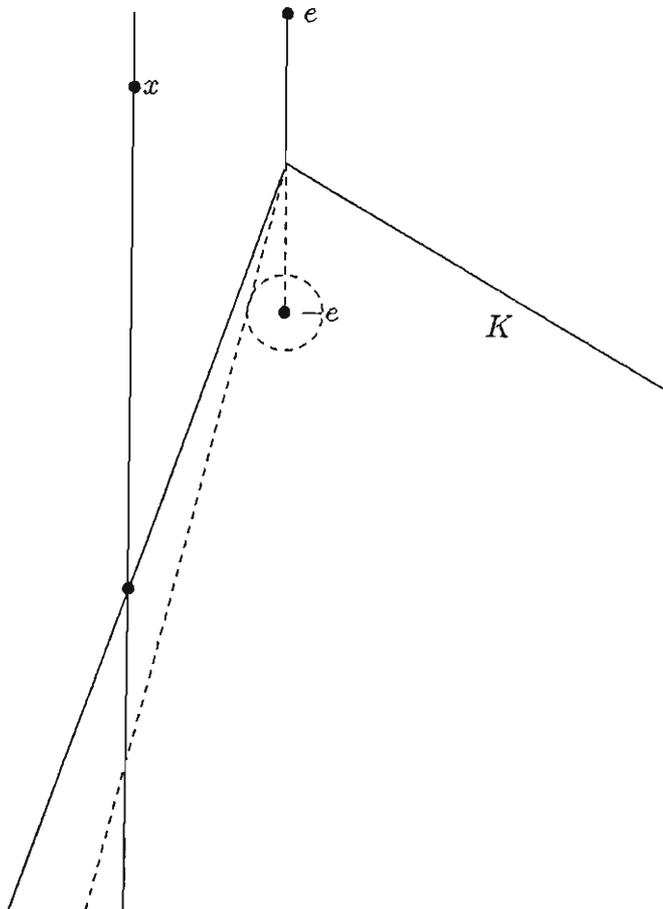


Bild 4.6: Zur Positivität von  $\partial_e u_*$ .

Denn ist  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ , so schneidet die Gerade

$$\{x + te ; t \in \mathbb{R}\}$$

den Rand von  $K$  genau in einem Punkt  $x + t_x e$  mit  $t_x < 0$ . (Zum Beweis sei  $B_\delta(-e) \subset K$ . Dann gilt für  $t < 0$  mit  $|t| > \frac{|x|}{\delta}$

$$\left| \frac{1}{|t|} (x + te) - (-e) \right| = \frac{|x|}{|t|} < \delta,$$

d.h.  $\frac{1}{|t|}(x + te) \in \overset{\circ}{K}$ , und da  $K$  ein Kegel ist, damit auch  $x + te \in \overset{\circ}{K}$ .) Betrachte dann die Funktion

$$w(t) := u_*(x + te).$$

Es ist  $w(0) = u_*(x) > 0$  nach (4.17.2) und  $w(t) = 0$  für  $t \leq t_x$ . Außerdem folgt aus der Konvexität von  $u_*$ , daß  $w'' \geq 0$ . Daher ist

$$\partial_e u_*(x) = w'(0) \geq \frac{w(0) - w(t_x)}{-t_x} = \frac{w(0)}{|t_x|} > 0.$$

Dies beweist (4.17.4). Da  $\nabla \cdot (a_* \nabla u_*) = f_*$  in  $\{u_* > 0\}$  mit  $a_* = a(x_0)$  und  $f_* = f(x_0)$ , folgt außerdem, daß  $\partial_e u_*$  schwache Lösung von

$$(4.17.5) \quad \nabla \cdot (a_* \nabla \partial_e u_*) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus K$$

ist. Da  $D^2 u_*$  auf  $\mathbb{R}^n$  beschränkt ist, ist darüberhinaus  $\partial_e u_*$  global Lipschitzstetig. Wegen  $u_*(0) = 0$ , also  $\nabla u_*(0) = 0$ , gilt dann insbesondere

$$(4.17.6) \quad |\partial_e u_*(x)| \leq C|x| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir wollen nun zeigen, daß  $K$  ein Halbraum ist. Dazu führen wir die Annahme, daß dies nicht der Fall ist, zu einem Widerspruch mit (4.17.6). Der Einfachheit halber führen wir eine lineare Variablentransformation durch, so daß  $a_* = \text{Id}$  in (4.17.5) wird, also

$$(4.17.7) \quad -\Delta \partial_e u_* = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Falls  $K$  kein Halbraum ist, so hat  $K$ , da es sich um einen konvexen Kegel mit Spitze 0 handelt, im Punkte 0 zwei verschiedene Stützebenen. Dies impliziert, daß

$$D_{2\omega} \cap K = \emptyset,$$

wobei für  $\omega > 0$  (nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems) und jedes gegebene  $\delta > 0$

$$D_\omega := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_i| \leq \frac{\pi}{2\delta} \quad \text{für } i = 3, \dots, n, \right. \\ \left. (x_1, x_2) = r e^{i\theta} \quad \text{mit } 0 < r < 1 \text{ und } |\theta| < \frac{\pi}{2} + \omega \right\}.$$

Wir vergleichen  $\partial_e u_*$  mit

$$v(x) := r^\beta \cos(\alpha\theta) \prod_{i=3}^n \cos(\delta x_i) \quad \text{für } x = (r e^{i\theta}, x_3, \dots, x_n),$$

wobei  $0 < \alpha < \beta < 1$  gewählt seien mit  $\alpha(\frac{\pi}{2} + \omega) = \frac{\pi}{2}$ . Es berechnet sich

$$\Delta v = \left( \frac{\beta^2 - \alpha^2}{r^2} - (n-2)\delta^2 \right) v ,$$

d.h. es gilt

$$(4.17.8) \quad -\Delta v \leq 0 \quad \text{in } D_\omega, \text{ falls } \delta^2 \leq \frac{\beta^2 - \alpha^2}{n-2}$$

gewählt ist. Auf  $\partial D_\omega$  gilt:

$$\begin{aligned} v &\leq 1 && \text{auf } S := \{x \in \partial D_\omega ; |(x_1, x_2)| = 1\}, \\ v &= 0 && \text{auf } \partial D_\omega \setminus S. \end{aligned}$$

Da  $S \cap K = \emptyset$ , folgt aus (4.17.4), daß

$$\partial_e u_* \geq c \geq cv \quad \text{auf } S,$$

außerdem ist

$$\partial_e u_* \geq 0 = cv \quad \text{auf } \partial D \setminus S.$$

Die Differentialgleichung (4.17.7) zusammen mit (4.17.8) ergibt dann nach dem Maximumprinzip

$$\partial_e u_* \geq cv \quad \text{auf } D,$$

insbesondere

$$\partial_e u_*(re_1) \geq cv(re_1) = cr^\beta ,$$

wegen  $\beta < 1$  ein Widerspruch zu (4.17.6).

Damit ist gezeigt, daß  $K$  ein Halbraum ist. Wir müssen nun beweisen, daß  $u_*$  die Halbraumlösung bezüglich dieses Halbraums ist, d.h.

$$(4.17.9) \quad u_*(x) = \frac{f_*}{2} \max(x_1, 0)^2 =: u_0(x) ,$$

wenn wir das Koordinatensystem so wählen, daß

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_1 \leq 0\} ,$$

wobei wir weiterhin annehmen, daß  $a_* = \text{Id}$ . Betrachte die Funktion

$$v := u_* - u_0 .$$

Aus der Differentialgleichung für  $u_*$  in  $\{x_1 > 0\}$  folgt, daß  $v$  in  $\{x_1 > 0\}$  harmonisch ist. Außerdem ist  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $v = 0$  und  $\nabla v = 0$  auf  $\{x_1 \leq 0\}$ , somit ist  $v$  global auf  $\mathbb{R}^n$  eine harmonische Funktion, und damit lokal eine analytische Funktion. Da  $v = 0$  in  $\{x_1 \leq 0\}$ , muß daher  $v = 0$  auf  $\mathbb{R}^n$  sein, womit (4.17.9) gezeigt ist.

Es bleibt einzusehen, daß ein eindeutiger Blow-up-Limes existiert. Nun ist aber die Definition von  $K$  unabhängig von der Blow-up-Folge gewesen, so daß also jeder Blow-up-Limes  $K$  als Nullstellenmenge haben muß, d.h. es gilt

(4.17.2) und dann auch (4.17.9) für jeden Blow-up-Limes. Dies beweist, daß für die gesamte Blow-up-Folge  $u_\rho \rightarrow u_*$  in  $C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Kombinieren wir 4.15 mit 4.17, so heißt das, daß der zweite Blow-up-Limes in einem Punkt am freien Rand eine Halbraumlösung ist. Dies ist ein Indiz für die Regularität des freien Randes. Zumindest impliziert dies, daß in gewissen Umgebungen von Punkten am freien Rand die Lösung in der Nähe einer Halbraumlösung liegt, d.h. in einem gewissen Sinne „flach“ ist. Dazu definieren wir

**4.18 Flacher freier Rand.** Es sei  $u$  eine lokale Lösung der Variationsungleichung in einer Kugel  $B_\rho(x_0)$  mit  $x_0 \in \partial\{u > 0\}$ . Wir sagen:

(4.18.1) Die Lösung ist  $\varepsilon$ -flach ( oder  $\varepsilon$ -streifenflach) in Richtung  $\nu$ , wenn  $\nu$  ein Einheitsvektor ist und wenn für alle  $x \in B_\rho(x_0)$  gilt

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cdot \nu < -\varepsilon\rho &\Rightarrow u(x) > 0, \\ (x - x_0) \cdot \nu > \varepsilon\rho &\Rightarrow u(x) = 0. \end{aligned}$$

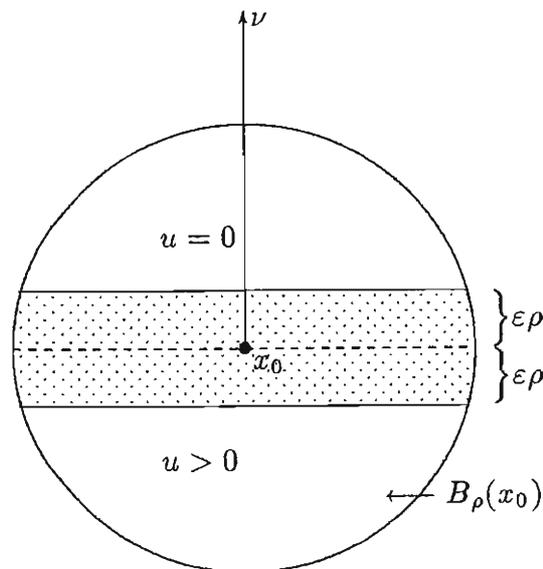


Bild 4.7: Flachheit des freien Randes.

(4.18.2) Die Lösung ist  $\varepsilon$ -kegelflach in Richtung  $\nu$ , wenn  $\nu$  ein Einheitsvektor ist und wenn für alle  $x \in B_\rho(x_0)$  gilt

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cdot \nu < -\varepsilon|x - x_0| &\Rightarrow u(x) > 0, \\ (x - x_0) \cdot \nu > \varepsilon|x - x_0| &\Rightarrow u(x) = 0. \end{aligned}$$

Eine gleichmäßige Kegelflachheit impliziert die Regularität des freien Randes. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

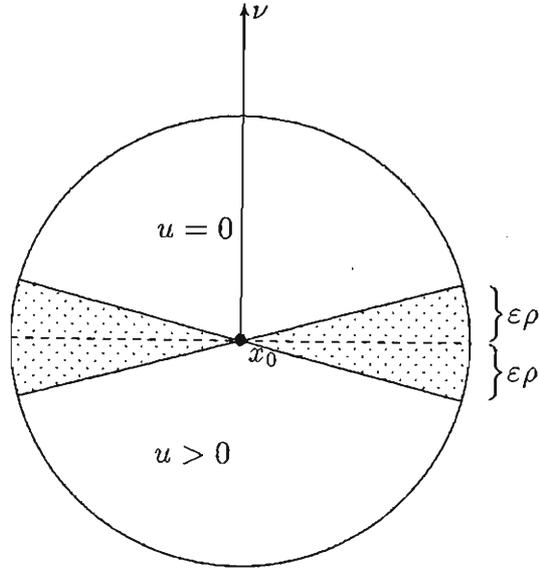


Bild 4.8: Kegelflachheit des freien Randes.

**4.19 Satz.** Sei  $u$  eine lokale Lösung der Variationsungleichung mit  $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ . Es gebe eine Umgebung  $B_{2r_0}(x_0) \subset \Omega$ , und zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiere eine kleine Konstante  $0 < \rho < r_0$ , so daß die Lösung  $\varepsilon$ -kegelflach ist in  $B_\rho(x)$  für alle  $x \in \overline{B_{r_0}(x_0)} \cap \partial\{u > 0\}$ . Dann ist der freie Rand  $\partial\{u > 0\}$  in einer Umgebung von  $x_0$  ein  $C^1$ -Graph.

*Beweis.* Wir betrachten zuerst die Richtungen in der Flachheitsbedingung. Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\rho_\varepsilon > 0$  (wir können annehmen, daß  $\varepsilon \mapsto \rho_\varepsilon$  monoton wachsend ist) und zu  $x \in \overline{B_{r_0}(x_0)} \cap \partial\{u > 0\}$  eine Richtung  $\nu_\varepsilon(x)$ , so daß für alle  $\tilde{x} \in \overline{B_{\rho_\varepsilon}(x)}$  gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{x} - x) \cdot \nu_\varepsilon(x) &\geq \varepsilon |\tilde{x} - x| \quad \Rightarrow \quad u(\tilde{x}) = 0, \\ (\tilde{x} - x) \cdot \nu_\varepsilon(x) &< -\varepsilon |\tilde{x} - x| \quad \Rightarrow \quad u(\tilde{x}) > 0. \end{aligned}$$

Außerdem muß dann gelten

$$(4.19.1) \quad \tilde{x} \in \partial\{u > 0\} \quad \Rightarrow \quad |(\tilde{x} - x) \cdot \nu_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon |\tilde{x} - x|.$$

Betrachten wir dann zwei Punkte  $x_1, x_2 \in B_r(x_0) \cap \partial\{u > 0\}$  mit  $|x_1 - x_2| \leq \frac{\rho_\delta}{2}$  und  $0 < \delta \leq \varepsilon$ , so folgt erstens

$$|(x_1 - x_2) \cdot \nu_\delta(x_2)| \leq \delta |x_1 - x_2| \leq \varepsilon \cdot \frac{\rho_\delta}{2}.$$

Zweitens können wir für  $y \in \partial B_1(0)$  in der Flachheitsbedingung im Punkte  $x_1$  bezüglich  $\varepsilon$  und im Punkte  $x_2$  bezüglich  $\delta$  setzen

$$\tilde{x} := x_1 + \frac{\rho_\delta}{2} y,$$

denn  $|\tilde{x} - x_1| \leq \frac{\rho_\delta}{2} \leq \rho_\varepsilon$  und  $|\tilde{x} - x_2| \leq \rho_\delta$ . Ist dann

$$y \cdot \nu_\varepsilon(x_1) \geq \varepsilon ,$$

so folgt  $(\tilde{x} - x_1) \cdot \nu_\varepsilon(x_1) \geq \varepsilon |\tilde{x} - x_1|$ , also  $u(\tilde{x}) = 0$  aus der Flachheitsbedingung im Punkte  $x_1$ , und daher  $(\tilde{x} - x_2) \cdot \nu_\delta(x_2) \geq -\delta |\tilde{x} - x_2|$  aus der Flachheitsbedingung im Punkte  $x_2$ , was impliziert

$$\begin{aligned} y \cdot \nu_\delta(x_2) &\geq -\frac{2}{\rho_\delta} (\delta |\tilde{x} - x_2| + (x_1 - x_2) \cdot \nu_\delta(x_2)) \\ &\geq -\varepsilon \left( 1 + \frac{2}{\rho_\delta} |x_1 - x_2| + \frac{2}{\varepsilon \rho_\delta} (x_1 - x_2) \cdot \nu_\delta(x_2) \right) \\ &\geq -3\varepsilon . \end{aligned}$$

Also haben wir für  $y \in \partial B_1(0)$  gezeigt, daß

$$(4.19.2) \quad y \cdot \nu_\varepsilon(x_1) \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -y \cdot \nu_\delta(x_2) \leq 3\varepsilon .$$

Wir setzen nun (falls  $\nu_\varepsilon(x_1) \neq \nu_\delta(x_2)$ )

$$y = \frac{\nu_\varepsilon(x_1) - \nu_\delta(x_2)}{|\nu_\varepsilon(x_1) - \nu_\delta(x_2)|} ,$$

wobei

$$y \cdot \nu_\varepsilon(x_1) = -y \cdot \nu_\delta(x_2) = \frac{1 - \nu_\varepsilon(x_1) \cdot \nu_\delta(x_2)}{|\nu_\varepsilon(x_1) - \nu_\delta(x_2)|} = \frac{1}{2} |\nu_\varepsilon(x_1) - \nu_\delta(x_2)| .$$

Ist dann  $|\nu_\varepsilon(x_1) - \nu_\delta(x_2)| \geq 2\varepsilon$ , so folgt aus (4.19.2) daß  $|\nu_\varepsilon(x_1) - \nu_\delta(x_2)| \leq 6\varepsilon$ . Also gilt immer

$$(4.19.3) \quad |\nu_\varepsilon(x_1) - \nu_\delta(x_2)| \leq 6\varepsilon \quad \text{für } |x_1 - x_2| \leq \frac{\rho_\delta}{2} \text{ und } 0 < \delta \leq \varepsilon .$$

Setzen wir speziell  $x_2 = x_1$ , so erhalten wir, daß  $(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  eine Cauchy-Folge von beschränkten Vektorfeldern auf  $\overline{B_{r_0}(x_0)} \cap \partial\{u > 0\}$  ist. Also existiert eine Abbildung

$$\nu : \overline{B_{r_0}(x_0)} \cap \partial\{u > 0\} \rightarrow \partial B_1(0) ,$$

so daß  $|\nu_\varepsilon - \nu| \leq 6\varepsilon$  für kleine  $\varepsilon > 0$ . Unser Ziel ist es zu zeigen, daß  $\nu$  im klassischen Sinne Normale an den freien Rand ist.

Dazu sei ohne Einschränkung  $x_0 = 0$  und  $\nu(x_0) = e_n$ , der  $n$ -te Einheitsvektor. Wir geben ein kleines  $\varepsilon_0 > 0$  vor und betrachten die  $\varepsilon_0$ -Kegelflachheit in Punkten  $x \in B_{2r}(0) \cap \partial\{u > 0\}$ , wobei  $r := \frac{1}{4}\rho_{\varepsilon_0}$ . Nach (4.19.3) gilt

$$|\nu_{\varepsilon_0}(0) - e_n| \leq 6\varepsilon_0$$

und daher ebenfalls nach (4.19.3)

$$(4.19.4) \quad |\nu_{\varepsilon_0}(x) - e_n| \leq 12\varepsilon_0 .$$

Wir führen nun lokale Koordinaten

$$x = (y, z) \quad \text{mit } y \in \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^{n-1}, z \in \mathbb{R}$$

ein. Ist nun  $\varepsilon_0 < \frac{1}{18}$  so folgt aus (4.19.4) daß

$$(4.19.5) \quad \nu_{\varepsilon_0}(x) \cdot e_n - \sqrt{1 - (\nu_{\varepsilon_0}(x) \cdot e_n)^2} > 2\varepsilon_0,$$

und daraus für  $\tilde{y} \in \overline{B_r(0)}$  und  $t \geq |\tilde{y}|$

$$(4.19.6) \quad \begin{aligned} (\tilde{y}, t) \cdot \nu_{\varepsilon_0}(x) &> \varepsilon_0 |(\tilde{y}, t)|, \\ (\tilde{y}, -t) \cdot \nu_{\varepsilon_0}(x) &< -\varepsilon_0 |(\tilde{y}, -t)|. \end{aligned}$$

Setzen wir  $t = r$  so erhalten wir wegen der  $\varepsilon_0$ -Kegelflachheit im Punkte  $x = 0$

$$\begin{aligned} u(y, z) &= 0 \quad \text{für } z \text{ nahe } r, \\ u(y, z) &> 0 \quad \text{für } z \text{ nahe } -r. \end{aligned}$$

Daher ist der freie Rand in  $\overline{B_r(0)} \times [-r, r]$  eingeschachtelt in die Graphen der Funktionen  $g_- \leq g_+$  mit

$$\begin{aligned} g_-(y) &:= \inf\{z \in ]-r, r[ ; u(y, z) = 0\}, \\ g_+(y) &:= \sup\{z \in ]-r, r[ ; u(y, z) > 0\}. \end{aligned}$$

Nun folgt wegen der  $\varepsilon_0$ -Kegelflachheit im Punkte  $x = (y, z)$  aus (4.19.6) auch, daß für  $y \in \overline{B_r(0)}$  gilt  $g_+(y) = g_-(y)$  und

$$g_+(y + \tilde{y}) \leq g_+(y) + \varepsilon_0 |\tilde{y}|, \quad g_-(y + \tilde{y}) \geq g_-(y) - \varepsilon_0 |\tilde{y}|,$$

d.h.  $g := g_+ = g_-$  ist eine Lipschitz-stetige Funktion. Wir zeigen nun, daß  $g$  in jedem Punkte differenzierbar ist. Dazu schreiben wir (4.19.1) zusammen mit (4.19.3), d.h.  $|\nu_\varepsilon(x) - \nu(x)| \leq 6\varepsilon$ , als

$$|(\tilde{x} - x) \cdot \nu(x)| \leq 7\varepsilon |\tilde{x} - x| \quad \text{für } \tilde{x} \in \overline{B_{\rho_\varepsilon}(x)} \cap \partial\{u > 0\}.$$

Setzen wir  $x = (y, g(y))$  und  $\tilde{x} = (\tilde{y}, g(\tilde{y}))$ , so folgt daraus die Differenzierbarkeit von  $g$  im Punkte  $y$  mit

$$\nabla g(y) = \frac{1}{\nu(x) \cdot e_n} (-\nu(x) \cdot e_1, \dots, -\nu(x) \cdot e_{n-1}).$$

Es bleibt also die Stetigkeit von  $\nu$  zu zeigen, was die Stetigkeit von  $\nabla g$  und damit die Behauptung des Satzes impliziert. Nun gilt nach (4.19.3)

$$|\nu_\varepsilon(x_1) - \nu_\varepsilon(x_2)| \leq 6\varepsilon \quad \text{für } |x_1 - x_2| \leq \frac{\rho_\varepsilon}{2}$$

und auch nach (4.19.3)

$$|\nu_\varepsilon(x_j) - \nu(x_j)| \leq 6\varepsilon \quad \text{für } j = 1, 2,$$

so daß also

$$|\nu(x_1) - \nu(x_2)| \leq 18\varepsilon \quad \text{für } |x_1 - x_2| \leq \frac{\rho_\varepsilon}{2},$$

was die Stetigkeit von  $\nu$  beweist, wobei der Stetigkeitsmodul von der Funktion  $\varepsilon \mapsto \rho_\varepsilon$  bestimmt wird. Insbesondere sehen wir, daß  $\nu$  Hölder-stetig ist, falls diese Funktion polynomial gewählt werden kann.  $\square$

Zur Regularität des freien Randes haben wir also dessen Flachheitseigenschaften zu untersuchen. Aus 4.15 und 4.17 erhalten wir zunächst für konvexe lokale Lösungen die Aussage 4.21, wofür wir die folgende Definition benötigen.

**4.20 Definition.** Die Dicke einer Menge  $E \subset \mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{width}(E) &:= \inf\{\delta > 0 ; \text{ Es gibt einen Einheitsvektor } e \in \mathbb{R}^n \\ &\quad \text{und ein } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ so daß} \\ &\quad \alpha \leq x \cdot e \leq \alpha + \delta \text{ für alle } x \in E \}. \end{aligned}$$

Die relative Dicke einer Menge  $E$  bzgl. einer anderen Menge  $D$  definieren wir durch

$$\text{width}(E, D) := \frac{\text{width}(E \cap D)}{\text{width}(D)} .$$

Da sich die Dicke linear skaliert, ist die relative Dicke eine skalierungsinvariante Größe.

**4.21 Lemma.** Sei  $D \subset\subset \Omega$ . Zu  $\varepsilon, \delta, M > 0$  gibt es ein  $\lambda > 0$ , so daß für jede lokale konvexe Lösung  $u$  in  $B_2(0)$  mit Koeffizienten, die aus Skalierung der gegebenen Koeffizienten auf einer Kugel in  $D$  hervorgegangen sind, so daß

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial\{u > 0\} , \\ \|D^2 u\|_{L^\infty(B_2(0))} &\leq M , \\ \text{width}(\{u = 0\}, B_1(0)) &\geq \delta , \end{aligned}$$

folgt, daß

$$u \text{ } \varepsilon\text{-kegelflach in } B_\lambda(0) \text{ ist.}$$

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage durch Widerspruch. Wir nehmen an, es gibt  $\varepsilon, \delta, M > 0$  und eine Folge  $\lambda_m \rightarrow 0$  mit zugehörigen lokalen konvexen Lösungen  $u_m$ , welche die angegebenen Eigenschaften haben, so daß  $u_m$  nicht  $\varepsilon$ -kegelflach in  $B_{\lambda_m}(0)$  ist. Da  $u_m(0) = 0, \nabla u_m(0) = 0$ , folgt

$$\|u_m\|_{H^{2,\infty}(B_2(0))} \leq C \cdot M .$$

Daher gibt es eine Teilfolge  $m \rightarrow \infty$ , so daß

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow u && \text{schwach* in } H_{loc}^{2,\infty}(B_2(0)), \\ u_m &\rightarrow u && \text{stark in } C_{loc}^{1,\beta}(B_2(0)) \text{ für } 0 < \beta < 1. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz  $u_m \rightarrow u$  ist dann

$$(4.21.1) \quad \text{width}(\{u = 0\}, B_1(0)) \geq \delta .$$

Weiter ist  $u$  wieder eine konvexe Lösung und wie in (4.12.2) folgt, daß  $0 \in \partial\{u > 0\}$ . Da also  $\{u = 0\}$  konvex ist, bedeutet (4.21.1), daß diese Menge  $n$ -dimensional ist. Deshalb haben die skalierten Funktionen

$$u_\rho(x) := \frac{1}{\rho^2} u(\rho x)$$

nach 4.17 eine eindeutig bestimmte Halbraumlösung  $u_*$  als Blow-up, d.h.

$$u_\rho \rightarrow u_* \quad \text{in } C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^n) \text{ für } 0 < \beta < 1 \text{ und } \rho \rightarrow 0.$$

Ohne Einschränkung sei

$$\{u_* = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_n \geq 0\}.$$

Da  $u_\rho \rightarrow u_*$  lokal gleichmäßig, und nach dem Nichtentartungslemma (siehe Aussage (4.12.1)), gilt dann für kleine  $\rho > 0$

$$\begin{aligned} u_\rho(x) &= 0 && \text{für } x \in \overline{B_2(0)} \text{ mit } x_n \geq \frac{\varepsilon}{2}, \\ u_\rho(x) &> 0 && \text{für } x \in \overline{B_2(0)} \text{ mit } x_n \leq -\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

d.h.  $u_\rho$  ist  $\frac{\varepsilon}{2}$ -flach in  $B_2(0)$ , in anderen Worten,  $u$  ist  $\frac{\varepsilon}{2}$ -flach in  $B_{2\rho}(0)$ . Da ebenso  $u_m \rightarrow u$  lokal gleichmäßig folgt wieder unter Ausnutzung von (4.12.1), daß für große  $m$

$$u_m \text{ } \varepsilon\text{-flach in } B_\rho(0)$$

ist. Da  $u_m$  konvex ist mit  $0 \in \partial\{u_m > 0\}$ , folgt dann aus der Konvexität von  $\{u_m = 0\}$  auf elementare Weise, daß

$$u_m \text{ } \varepsilon\text{-kegelflach in } B_\rho(0)$$

ist, für  $\lambda_m \leq \rho$  ein Widerspruch zur Wahl von  $u_m$ . □

Wir erhalten als

**4.22 Korollar.** Für jede konvexe lokale Lösung  $u$  der Variationsungleichung auf einer konvexen Menge  $\Omega$ , für die  $\{u = 0\}$   $n$ -dimensional ist, ist der freie Rand  $\partial\{u > 0\}$  lokal in  $\Omega$  ein  $C^1$ -Graph.

*Beweis.* Sei  $B_{r_0}(x_0) \subset \{u = 0\}$ ,  $D \subset\subset \Omega$  und  $x \in \overline{D} \cap \partial\{u > 0\}$ . Für  $B_r(x) \subset \Omega$  ist dann wegen der Konvexität von  $\{u = 0\}$

$$\text{width}(\{u = 0\}, B_r(x)) \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{r_0}{|x - x_0|}\right),$$

und wenn  $r \leq \frac{1}{2} \text{dist}(D, \partial\Omega)$  ist  $\|D^2 u\|_{L^\infty(B_r(x))} \leq C$  mit einer von  $x$  und  $r$  unabhängigen Konstanten  $C$ . Wir wenden dann 4.21 auf die Skalierung von  $u$  bezüglich  $B_{\frac{r}{2}}(x)$  an, und erhalten daß es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\lambda > 0$  gibt, das nicht von  $x$  und  $r$  abhängt, so daß  $u$   $\varepsilon$ -kegelflach in  $B_{\lambda \frac{r}{2}}(x)$  ist. Die Behauptung folgt dann aus Satz 4.19. □

Für allgemeine Lösungen können wir nicht wie am Ende des Beweises von 4.21 für konvexe Lösungen direkt von der Flachheit auf die Kegelflachheit schließen. Wir beginnen daher mit der folgenden Aussage:

**4.23 Lemma.** Es sei  $u$  lokale Lösung in  $\Omega$  und  $D \subset\subset \Omega$ . Zu  $\varepsilon, \delta > 0$  gibt es dann ein  $\lambda > 0$  und ein  $\rho > 0$ , so daß für

$$\begin{aligned} x \in \overline{D} \cap \partial\{u > 0\} \quad & \text{mit } B_r(x) \subset \Omega, r \leq \rho, \\ \text{width}(\{u = 0\}, B_r(x)) & \geq \delta \end{aligned}$$

folgt, daß

$$u \text{ } \varepsilon\text{-flach in } B_{\lambda r}(x) \text{ ist.}$$

*Beweis.* Wir beweisen dies wieder durch Widerspruch. Dazu definiere

$$r_0 := \frac{1}{2} \text{dist}(D, \partial\Omega) \quad \text{und} \quad M := \|D^2 u\|_{L^\infty(B_{r_0}(D))}.$$

Sei  $\varepsilon, \delta, \lambda > 0$ . Wir nehmen an, es gibt Kugeln  $B_{r_m}(x_m)$  mit Mittelpunkt  $x_m \in \overline{D} \cap \partial\{u > 0\}$  und Radius  $r_0 \geq r_m \rightarrow 0$ , so daß

$$\text{width}(\{u = 0\}, B_{r_m}(x_m)) \geq \delta,$$

aber  $u$  nicht  $\varepsilon$ -flach in  $B_{\lambda r_m}(x_m)$  ist. Dann sei  $u_m$  die Blow-up-Folge bezüglich  $B_{r_m}(x_m)$  und  $u_*$  ein zugehöriger Blow-up-Limes, der nach 4.15 eine konvexe Lösung ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|D^2 u_*\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} & \leq M, \\ \text{width}(\{u_* = 0\}, B_1(0)) & \geq \delta. \end{aligned}$$

Wir wählen nun  $\lambda$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon, \delta, M$  so, daß gemäß 4.21 gilt

$$u_* \text{ ist } \frac{\varepsilon}{2}\text{-kegelflach in } B_{2\lambda}(0).$$

Da  $u_m \rightarrow u_*$  gleichmäßig und wegen (4.12.1), folgt dann wie im Beweis von 4.21, daß für große  $m$

$$u_m \text{ } \varepsilon\text{-flach in } B_\lambda(0),$$

(nicht kegelflach (!)) ist, d.h.

$$u \text{ ist } \varepsilon\text{-flach in } B_{\lambda r_m}(x_m),$$

im Widerspruch zur Wahl dieser Kugeln. □

Das Ziel ist es nun, von der Flachheit auf die Kegelflachheit zu schließen. Dazu zeigen wir zunächst, daß eine einseitige Kegelflachheit ausreicht (siehe 4.24). In einem weiteren vorbereitenden Schritt untersuchen wir, inwieweit die Konvexität in der Nähe des freien Randes verletzt ist. Dazu haben wir die Aussage 4.14 in eine quantitative Version zu bringen (siehe 4.25).

**4.24 Lemma.** Sei  $u$  eine lokale Lösung in  $\Omega$  und  $D \subset\subset \Omega$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\rho > 0$ , so daß gilt: Ist  $x \in \bar{D} \cap \partial\{u > 0\}$  und  $B_r(x) \subset D$  mit  $r \leq \rho$ , so daß mit einem Einheitsvektor  $\nu$  gilt

$$\{\tilde{x} \in B_r(x) ; (\tilde{x} - x) \cdot \nu \geq \varepsilon|\tilde{x} - x|\} \subset \{u = 0\},$$

so folgt, daß

$$u \text{ } 2\varepsilon\text{-kegelflach in } B_r(x)$$

in Richtung  $\nu$  ist.

*Beweis.* Wir nehmen an, daß  $\varepsilon > 0$  und daß Kugeln  $B_{r_m}(x_m) \subset D$  mit  $r_m \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  und  $x_m \in \partial\{u > 0\}$  existieren, so daß mit Einheitsvektoren  $\nu_m$  für  $\tilde{x} \in B_{r_m}(x_m)$  gilt

$$(\tilde{x} - x_m) \cdot \nu_m \geq \varepsilon|\tilde{x} - x_m| \quad \Rightarrow \quad u(\tilde{x}) = 0,$$

und daß es Punkte  $y_m \in B_{r_m}(x_m)$  gibt mit

$$(y_m - x_m) \cdot \nu_m < -2\varepsilon|y_m - x_m| \quad \text{und} \quad u(y_m) = 0.$$

Wir betrachten die Blow-up-Folge  $u_m$  bezüglich der Kugeln  $B_{s_m}(x_m)$  mit  $s_m := |y_m - x_m| \rightarrow 0$ . Dann gilt für  $\tilde{x} \in B_1(0)$

$$\tilde{x} \cdot \nu_m \geq \varepsilon|\tilde{x}| \quad \Rightarrow \quad u_m(\tilde{x}) = 0,$$

und mit

$$z_m := \frac{1}{s_m}(y_m - x_m)$$

ist

$$z_m \cdot \nu_m < -2\varepsilon \quad \text{und} \quad u_m(z_m) = 0.$$

Für eine Teilfolge  $m \rightarrow \infty$  konvergiert  $z_m \rightarrow z$ ,  $\nu_m \rightarrow \nu$  und  $u_m$  gegen einen Blow-up-Limes  $u_*$ , der nach 4.15 eine konvexe Funktion ist. Außerdem muß  $0 \in \partial\{u_* > 0\}$  sein. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} u_*(\tilde{x}) &= 0 & \text{für } |\tilde{x}| < 1 \text{ mit } \tilde{x} \cdot \nu \geq \varepsilon|\tilde{x}|, \\ u_*(z) &= 0 & \text{, wobei } |z| = 1 \text{ und } z \cdot \nu < -2\varepsilon. \end{aligned}$$

Die Konvexität von  $\{u_* = 0\}$  liefert dann, daß 0 im Innern von  $\{u_* = 0\}$  liegt, ein Widerspruch.  $\square$

**4.25 Lemma.** Es sei  $u$  eine lokale Lösung der Variationsungleichung mit

$$(4.25.1) \quad a \in H_{loc}^{2,p}(\Omega), \quad f \in H_{loc}^{1,p}(\Omega), \quad \text{wobei } 1 - \frac{n}{p} > 0.$$

Dann gibt es zu  $D \subset\subset \Omega$  Zahlen  $r_0 > 0$  und  $\theta_0 < 1$ , so daß für Punkte  $x_0 \in \bar{D} \cap \partial\{u > 0\}$  und  $r \leq r_0$ , für die  $u$   $\frac{1}{2}$ -flach in  $B_r(x_0)$  ist, für alle Einheitsvektoren  $e \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\inf_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} \min(0, \partial_{ee}u) \geq \theta_0 \inf_{B_r(x_0)} \min(0, \partial_{ee}u) .$$

*Beweis.* Da  $u \in H_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$ , gilt für ein  $M < \infty$

$$\partial_{ee}u \geq -M \quad \text{in } B_r(x_0),$$

außerdem ist  $\partial_{ee}u = 0$  fast überall auf  $\{u = 0\}$ . Wir haben also zu zeigen, daß

$$\partial_{ee}u \geq -\theta_0 M \quad \text{in } B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap \{u > 0\}.$$

Der Beweis basiert auf einem Vergleichsprinzip für  $\partial_{ee}u$  auf  $B_r(x_0) \cap \{u > 0\}$ , wozu wir eine schwache Differentialgleichung für  $\partial_{ee}u$  aufzustellen haben. Der Systematik wegen betrachten wir dazu die Skalierung

$$u_r(x) := \frac{1}{r^2} u(x_0 + rx) ,$$

die

$$(4.25.2) \quad \partial_{ee}u_r \geq -M \quad \text{in } B_1(0)$$

erfüllt und Lösung von

$$0 = -\nabla \cdot (a_r \nabla u_r) + f_r \quad \text{auf } D_0 := B_1(0) \cap \{u_r > 0\}$$

ist, wobei

$$a_r(x) := a(x_0 + rx) , \quad f_r(x) := f(x_0 + rx) .$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$0 = -\nabla \cdot (a_r \nabla \partial_{ee}u_r + \partial_{ee}a_r \nabla u_r - f_r e) .$$

Wegen der Voraussetzung (4.25.1) folgt damit aus der linearen Regularitätstheorie, daß  $\partial_{ee}u_r \in H_{loc}^{2,p}(D_0)$  ist, wobei  $\partial_{ee}u_r$  schwache Lösung von

$$0 = -\nabla \cdot (a_r \nabla \partial_{ee}u_r + g_r)$$

ist, wenn

$$g_r := 2\partial_{ee}a_r \nabla \partial_{ee}u_r + \partial_{ee}a_r \nabla u_r - \partial_e f_r e \in L^p(B_1(0)) .$$

Wegen  $\alpha := 1 - \frac{n}{p} > 0$  ist daher

$$\partial_{ee}u_r \in H_{loc}^{1,p}(D_0) \subset C_{loc}^{0,\alpha}(D_0)$$

mit (4.25.2). Wesentlich für die weitere Argumentation ist nun, daß wir aus Lemma 4.14 wissen, daß

$$\liminf \{ \partial_{ee}u_r(x) ; x \in D_0 , \text{dist}(x, \partial\{u_r > 0\}) \rightarrow 0 \} \geq 0$$

ist. Dies nutzen wir aus, um  $\partial_{ee}u_r$  mit  $Mv$  zu vergleichen, wobei  $v = v_1 + v_0$ . Wir definieren  $v_1$  als die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot a_r \nabla v_1 &= 0 && \text{in } D_1 := B_1(0) \setminus K, \\ v_1 &= 0 && \text{auf } \partial K, \\ v_1 &= -1 && \text{auf } \partial B_1(0), \end{aligned}$$

wobei

$$K := \overline{B_{\frac{1}{8}}(\frac{3}{4}\nu_0)},$$

wenn wir annehmen, daß  $u_r$   $\frac{1}{2}$ -flach in Richtung  $\nu_0$  ist. Weiter sei  $v_0$  schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a_r \nabla v_0 + g_r) &= 0 && \text{in } D_1, \\ v_0 &= 0 && \text{auf } \partial D_1. \end{aligned}$$

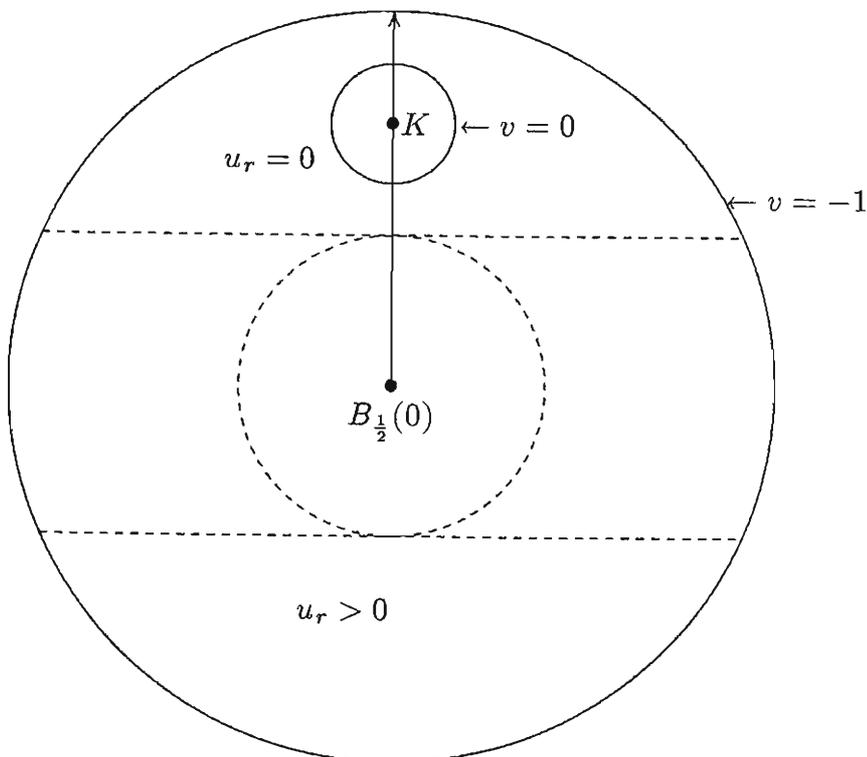


Bild 4.9: Vergleichsfunktion im Beweis von 4.25.

Nach dem schwachen Maximumprinzip ist  $v_1 \geq -1$  auf  $D_1$ , und nach dem starken Maximumprinzip sogar (gleichmäßig bzgl. des Koeffizienten  $a_r$ )

$$v_1 \geq -\theta_1 > -1 \quad \text{auf } \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$$

mit einer von  $x_0$  und  $r$  unabhängigen Konstanten  $\theta_1 < 1$ . Ebenso ist  $v_1 \leq 0$  auf  $D_1$  und nach dem starken Maximumprinzip für eine Konstante  $\theta_2 > 0$

$$v_1 \leq -\theta_2 < 0 \quad \text{auf } \left\{ x \in \overline{B_1(0)} ; x \cdot \nu_0 \leq \frac{1}{2} \right\},$$

somit auch auf  $\overline{B_1(0)} \cap \partial\{u_r > 0\}$ . Für  $v_0$  gilt nach der linearen Regularitätstheorie, und da  $\alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0$  ist,

$$\begin{aligned} |v_0| &\leq C \|v_0\|_{H^{1,p}(D_1)} \leq C \|g_r\|_{L^p(B_1(0))} \\ &\leq C \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \|g\|_{L^p(B_r(x))} , \end{aligned}$$

wenn

$$g := 2\partial_e a \nabla \partial_e u + \partial_{ee} a \nabla u - \partial_e f e \in L^p_{loc}(\Omega) .$$

Somit ist

$$|v_0| \leq C \cdot r^\alpha \leq C r_0^\alpha ,$$

d.h. wenn  $r_0$  klein genug gewählt wird, ist

$$v \geq v_1 - |v_0| \geq -\theta_0 \quad \text{auf } \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$$

mit

$$\theta_0 := \frac{1 + \theta_1}{2} < 1 ,$$

und

$$v \leq v_1 + |v_0| \leq -\theta_2 + |v_0| \leq 0 \quad \text{auf } \overline{B_1(0)} \cap \partial\{u_r > 0\} .$$

Daraus und aus der Randbedingung für  $v$  auf  $\partial B_1(0)$  folgern wir, daß

$$\liminf \{ \partial_{ee} u_r(x) - Mv(x) ; x \in D_0 , \text{dist}(x, \partial D_0) \rightarrow 0 \} \geq 0 .$$

Daher folgt nach dem Maximumprinzip  $\partial_{ee} u_r \geq Mv$  in  $D_0$ , insbesondere

$$\partial_{ee} u_r \geq -\theta_0 M \quad \text{auf } B_{\frac{1}{2}}(0) \cap \{u_r > 0\} ,$$

was zu zeigen war. □

**4.26 Lemma.** Sei  $u$  lokale Lösung in  $\Omega$  mit (4.25.1) und  $D \subset\subset \Omega$ . Zu  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$  und  $0 < \delta < \frac{1}{4}$  gibt es dann ein  $\mu > 0$  und ein  $\rho > 0$ , so daß für

$$\begin{aligned} x \in \overline{D} \cap \partial\{u > 0\} \quad &\text{mit } B_r(x) \subset \Omega, r \leq \rho, \\ \text{width}(\{u = 0\}, B_r(x)) &\geq \delta \end{aligned}$$

folgt, daß

$$u \text{ } \varepsilon\text{-kegelflach in } B_{\mu r}(x) \text{ ist.}$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $x = 0$ . Sei zunächst  $\lambda, \rho > 0$  wie in Lemma 4.23, so daß also  $u$   $\varepsilon$ -flach in  $B_{\lambda r}(0)$  ist. Dann folgt

$$\text{width}(\{u = 0\}, B_{\lambda r}(0)) \geq \frac{1 - \varepsilon}{2} \geq \delta ,$$

so daß sich 4.23 erneut auf die Kugel  $B_{\lambda r}(0)$  anwenden läßt. Induktiv erhalten wir, daß

$$u \text{ } \varepsilon\text{-flach in } B_{\lambda^k r}(0)$$

ist für  $k \in \mathbb{N}$ . Aus Lemma 4.25 folgt dann induktiv (wir können  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  annehmen)

$$\partial_{ee} u \geq -\theta_0^k M \quad \text{in } B_{\lambda^k r}(0),$$

wobei  $0 < \theta_0 < 1$  und  $M := \|D^2 u\|_{L^\infty(B_\rho(D))}$  unabhängig von  $\lambda$  und  $r$  sind.

Nun wähle  $k_0 \in \mathbb{N}$  und für  $k > k_0$  betrachte einen Punkt

$$x_k \in \overline{B_{\lambda^k r}(0)} \setminus B_{\lambda^{k+1} r}(0) \quad \text{mit } u(x_k) > 0.$$

Nach dem Nichtentartungslemma 4.10 finden wir zu  $\tau > 0$  einen Punkt

$$x'_k \in B_{\tau \lambda^k r}(x_k) \quad \text{mit } u(x'_k) \geq c(\tau \lambda^k r)^2.$$

Dann folgt

$$(4.26.1) \quad \left| \frac{x'_k}{|x'_k|} - \frac{x_k}{|x_k|} \right| \leq \frac{2|x'_k - x_k|}{|x_k|} \leq \frac{2}{\lambda} \tau.$$

Nun betrachte die Funktion  $u$  auf dem Strahl  $t \mapsto tx'_k$ . Unter Ausnutzung von  $\nabla u(0) = 0$  erhalten wir für  $t > 1$  mit  $|tx'_k| \leq \lambda^{k-1} r$

$$\begin{aligned} u(tx'_k) &= u(x'_k) + \int_0^{ts_1} \int_0^{s_2} \partial_{x'_k x'_k} u(s_2 x'_k) ds_2 ds_1 \\ &\geq c(\tau \lambda^k r)^2 - M \theta_0^{k-1} |x'_k|^2 t^2. \end{aligned}$$

Wählen wir  $t = t_k$  mit  $|t_k x'_k| = \lambda^{k-1} r$ , so erhalten wir

$$u(t_k x'_k) \geq (\lambda^{k-1} r)^2 (c(\tau \lambda)^2 - M \theta_0^{k-1}) > 0,$$

falls wir setzen

$$\tau = \tau_{k-1} := C \frac{\sqrt{M}}{\lambda} \theta_0^{\frac{k-1}{2}}$$

mit einer geeigneten Konstanten  $C$ . Mit der Notation

$$x_{k-1} := t_k x'_k$$

wird dann (4.26.1) zu

$$(4.26.2) \quad \left| \frac{x_{k-1}}{|x_{k-1}|} - \frac{x_k}{|x_k|} \right| \leq \frac{2}{\lambda} \tau_{k-1}.$$

Wir fahren nun fort, indem wir die gleiche Prozedur auf  $x_{k-1}$  anwenden, und konstruieren so Punkte  $x_k, \dots, x_{k_0}$ . Dabei interessieren uns die Eigenschaften  $u(x_k) > 0$ ,  $u(x_{k_0}) > 0$ , und daß aus (4.26.2) folgt

$$(4.26.3) \quad \left| \frac{x_{k_0}}{|x_{k_0}|} - \frac{x_k}{|x_k|} \right| \leq \frac{2}{\lambda} \sum_{j \geq k_0} \tau_j \\ \leq C(M, \lambda) \sum_{j \geq k_0} \theta_0^j = C(M, \lambda, \theta_0) \theta_0^{\frac{k_0}{2}}.$$

Nun wähle einen Einheitsvektor  $\nu$  so, daß  $u$   $\varepsilon$ -flach in  $B_{\lambda^{k_0}r}(0)$  in Richtung  $\nu$  ist, also für  $x \in B_{\lambda^{k_0}r}(0)$  gilt:

$$(4.26.4) \quad x \cdot \nu \geq \varepsilon \lambda^{k_0} r \quad \Rightarrow \quad u(x) = 0.$$

Wir wollen zeigen, daß, wenn  $k_0$  groß genug gewählt ist, daraus für  $x \in B_{\lambda^{k_0}r}(0)$  folgt:

$$(4.26.5) \quad x \cdot \nu \geq 2\varepsilon|x| \quad \Rightarrow \quad u(x) = 0.$$

Wir nehmen an, dies sei falsch. Dann gibt es einen Punkt  $x \in B_{\lambda^{k_0}r}(0)$  mit  $x \cdot \nu \geq 2\varepsilon|x|$ , aber  $u(x) > 0$ . Wähle  $k \geq k_0$ , so daß  $x \in B_{\lambda^k r}(0) \setminus B_{\lambda^{k+1}r}(0)$ . Wir setzen dann  $x_k := x$  und konstruieren wie oben dazu Punkte  $x_{k-1}, \dots, x_{k_0}$ . Setze  $y := x_{k_0}$ . Dann ist

$$y \in \partial B_{\lambda^{k_0}r}(0) \quad \text{mit } u(y) > 0,$$

so daß aus (4.26.4) folgt

$$(4.26.6) \quad \frac{y}{|y|} \cdot \nu < \varepsilon.$$

Nun folgt aber aus (4.26.3)

$$\left| \frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|} \right| \leq C(M, \lambda, \theta_0) \theta_0^{\frac{k_0}{2}},$$

so daß also nach Wahl von  $x$

$$2\varepsilon \leq \frac{x}{|x|} \cdot \nu \leq \frac{y}{|y|} \cdot \nu + C\theta_0^{\frac{k_0}{2}} \leq \varepsilon + C\theta_0^{\frac{k_0}{2}}.$$

Da  $\theta_0 < 1$ , erhalten wir damit einen Widerspruch, falls wir  $k_0$  groß genug wählen.

Damit ist (4.26.5) gezeigt. Wir kombinieren nun diese Aussage mit Lemma 4.24 und erhalten, falls  $\rho$  klein genug gewählt wird, daß

$$u \text{ } 4\varepsilon\text{-kegelflach in } B_{\lambda^{k_0}r}(0)$$

ist. Dies beweist die Behauptung.  $\square$

Damit haben wir alle Hilfsmittel zusammengetragen, die den folgenden Regularitätssatz beweisen.

**4.27 Satz.** Sei  $u$  eine lokale Lösung in  $\Omega$  mit Funktionen, die (4.25.1) erfüllen, und  $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ . Gilt dann

$$(4.27.1) \quad \liminf_{r \rightarrow 0} \text{width}(\{u = 0\}, B_r(x_0)) > 0 ,$$

so ist der freie Rand  $\partial\{u > 0\}$  in einer Umgebung von  $x_0$  ein  $C^1$ -Graph.

*Beweis.* Zunächst wähle  $\rho > 0$  so klein, so daß

$$\text{width}(\{u = 0\}, B_r(x_0)) \geq 2\delta > 0 \quad \text{für } 0 < r \leq \rho.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle dann  $\rho$  gemäß Lemma 4.26 klein genug. Für  $|x - x_0| \leq \frac{\rho}{2}$  ist dann

$$\begin{aligned} \text{width}(\{u = 0\}, B_\rho(x)) &= \frac{1}{2\rho} \text{width}(\{u = 0\} \cap B_\rho(x)) \\ &\geq \frac{1}{2\rho} \text{width}(\{u = 0\} \cap B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)) \\ &= \frac{1}{2} \text{width}(\{u = 0\}, B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)) \geq \delta , \end{aligned}$$

so daß also die Aussage in 4.26 gleichmäßig für alle Punkte  $x \in B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$  gilt. Diese gleichmäßige Kegelflachheit ergibt nach Satz 4.19 die Behauptung.  $\square$

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Regularitätsbedingung (4.27.1) zum Beispiel dann erfüllt ist, wenn die Koinzidenzmenge  $\{u = 0\}$  im Punkte  $x_0$  eine positive Lebesgue-Dichte hat, d.h. wenn gilt

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{u = 0\} \cap B_r(x_0))}{\mathcal{L}^n(B_r(x_0))} > 0 .$$

Daß diese Bedingung nicht immer erfüllt zu sein braucht, zeigen die Lösungen in (4.16.1) mit niederdimensionaler Koinzidenzmenge.



## Literatur

Die im folgenden angegebene Literatur ist exemplarisch und gibt nur die von mir bei der Abhaltung der Vorleseung ins Auge gefaßten Arbeiten wieder. Sie ist in keiner Weise repräsentativ für die vielen Mathematiker, deren wissenschaftliche Ergebnisse über Jahrzehnte hinweg eine Schrift wie diese überhaupt erst ermöglicht hat.

- [A1] H.W. Alt: Lineare Funktionalanalysis. Springer Hochschultexte 1985.
- [A2] H.W. Alt: Strömungen durch inhomogene poröse Medien mit freiem Rand. J.Reine Angew. Math. 305, 89-115 (1979).  
(für 2.15 - 2.17)
- [AC] H.W. Alt, L.A. Caffarelli: Existence and Regularity for a minimum problem with free boundary. J. Reine Angew. Math. 105, 105-144 (1981)  
(Grundlage für Abschnitt 6)
- [C] L.A. Caffarelli: The regularity of free boundaries in higher dimension. Acta Math. 139, 155-184 (1977)  
(Grundlage für zweiten Teil von Abschnitt 4)
- [FA] A. Friedman: Variational Principles and Free-Boundary Problems. Wiley 1982.
- [FJ] J. Frehse: Capacity Methods in the Theory of Partial Differential Equations. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 84, 1-44 (1982).  
(Grundlage für Abschnitt 3, enthält ausführliche Literaturhinweise)
- [KS] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia: An Introduction to Variational Inequalities and Their Application. Academic Press 1980



Bestellungen nimmt entgegen:

Institut für Angewandte Mathematik  
der Universität Bonn  
Sonderforschungsbereich 256  
Wegelerstr. 6  
D-5300 Bonn 1

Telefon: 0228/73 3411  
Telefax: 0228/73 7864  
E-mail: SFB256 @ DBNRHRZ1. Bitnet

### Verzeichnis der erschienenen Arbeiten aus der Vorlesungsreihe

#### 1987

1. Jost, Jürgen: Das Existenzproblem für Minimalflächen; erscheint in: Jahresberichte DMV
2. Jost, Jürgen: Twodimensional Geometric Variational Problems; erscheint in: Proceedings Int. Congr. Math. Berkeley 1986
3. Schrauf, Géza: Strömungsmechanik im Flugzeugbau. Teil I: Die Grundgleichungen

#### 1988

4. Fuchs, Martin: Regularitätstheorie für Minimalstellen von degenerierten Variationsintegralen mit nichtlinearen Nebenbedingungen: p-harmonische Hindernisprobleme
5. Analysis-Seminar 1987, Aachen-Bochum-Bonn-Düsseldorf
6. Jost, Jürgen: Two-Dimensional Geometric Variational Problems; eingereicht bei: Annals of Math.Studies
7. Karcher, Hermann: The Triply Periodic Minimal Surfaces of Alan Schoen and their Constant Mean Curvature Companions; wird eingereicht bei: manuscripta math.

#### 1989

8. Domanski, Wlodzimierz: Stability of shock fronts for multidimensional conservation laws
9. Leis, Rolf: Zur Entwicklung der angewandten Analysis und mathematischen Physik in den letzten hundert Jahren; erscheint in: DMV-Jubiläumsbuch, Vieweg-Verlag
10. Analysis-Seminar 1988, Bochum-Bonn-Düsseldorf-Saarbrücken-Wuppertal
11. von Wahl, Wolf: Vorlesung über das Außenraumproblem für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes
12. Karcher, Hermann: Construction of Minimal Surfaces

1990

13. Racke, Reinhard: Anfangswertprobleme bei nichtlinearen Evolutionsgleichungen
14. Kuwert, Ernst Christoph: Der Minimalflächenbeweis des Positive Energy Theorem
15. Workshop on Nonlinear Hyperbolic Problems (Organisatoren: Rolf Leis, Reinhard Racke):  
Abstracts
16. Analysis-Seminar 1989, Bochum-Bonn-Düsseldorf-Saarbrücken-Wuppertal
17. Bemelmans, Josef; Hildebrandt, Stefan; von Wahl, Wolf: Partielle Differentialgleichungen  
und Variationsrechnung; erscheint in: Festschrift zum Jubiläum der DMV

1991

18. Steffen, Klaus: An Introduction to Harmonic Mappings
19. Analysis-Seminar 1990, Bochum-Bonn-Düsseldorf-Saarbrücken-Wuppertal
20. DiBenedetto, Emmanuele: Topics in Quasilinear Degenerate and Singular Parabolic  
Equations
21. Alt, Hans Wilhelm: Elliptische Probleme mit freiem Rand. Teil I

